

Pr. Cabri 902

Enunciado

Dado un triángulo escaleno ABC, tomemos un punto M sobre la recta BC, distinto del punto

medio de BC y de los vértices B y C.

Construir seis triángulos que

1) Tengan M como uno de sus vértices

2) Que sean semejantes a ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

3) Que los otros dos vértices de cada uno de ellos estén situados en las rectas AB y AC.

Barroso, R. (2019). Propuesta a partir de un problema de Lewis Carroll.

Solución

por César Beade Franco

Consideremos el triángulo $A(a,b)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$ y el punto $M(m,0)$ sobre el lado BC.

Los otros puntos (que queremos calcular) sobre los otros lados los designamos por

$N(n, \frac{b(n-1)}{a-1})$ sobre CA y $P(p, \frac{bp}{a})$ sobre AB.

Calculemos un triángulo MNP semejante al ABC. Se cumplen las proporciones $\frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC}$ y

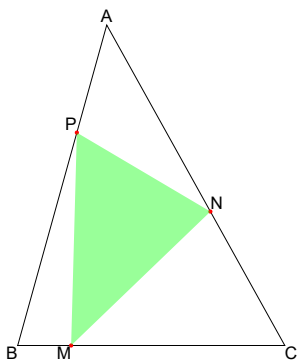
$\frac{MP}{NP} = \frac{AC}{BC}$ que nos permite expresar las coordenadas de N y P en función de m.

Recordando que $BC=1$, podemos plantear el sistema $\frac{|MN|^2}{|NP|^2} = |AB|^2$, $\frac{|MP|^2}{|NP|^2} = |AC|^2$.

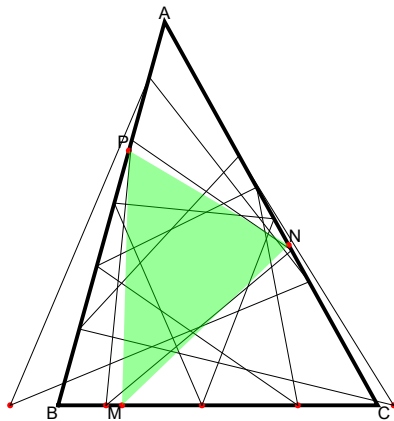
Sustituyendo los valores de n y p obtenidos encontramos que

$$N = \left(\frac{a^3 + b^2 + a(b^2 - 2p) + a^2(-1 + 2p)}{2(-a + a^2 + b^2)}, \frac{b(a^2 + b^2 + 2a(-1 + p))}{2(-a + a^2 + b^2)} \right) \text{ y}$$

$$P = \left(\frac{a(1 + a^2 + b^2 + 2a(-1 + p) - 2p)}{2(-a + a^2 + b^2)}, \frac{b(1 + a^2 + b^2 + 2a(-1 + p) - 2p)}{2(-a + a^2 + b^2)} \right).$$

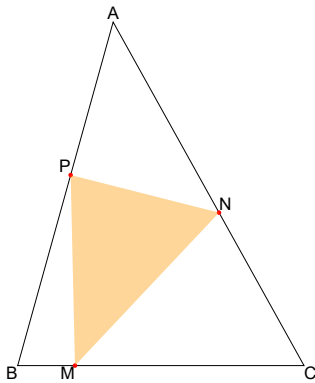


Desplazando M obtenemos otros triángulos.

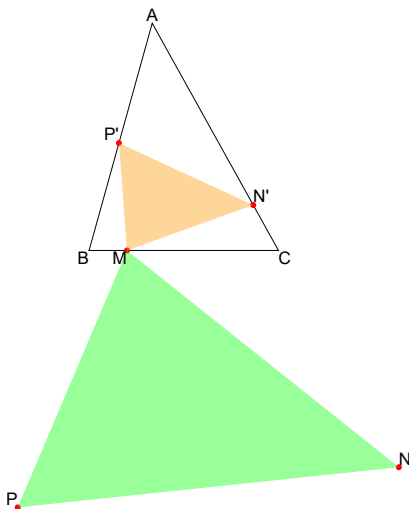


Si MNP es semejante a ACB la proporciones anteriores serían $\frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BC}$ y $\frac{MP}{NP} = \frac{AC}{BC}$ que daría lugar al sistema

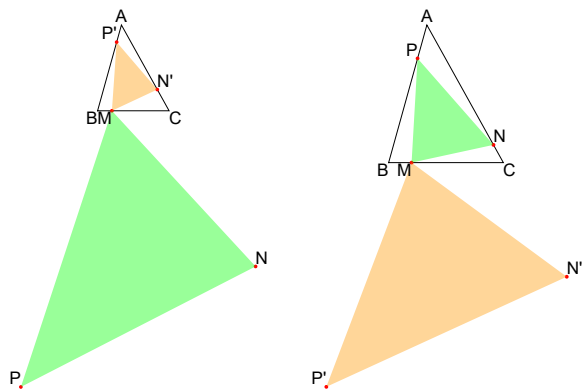
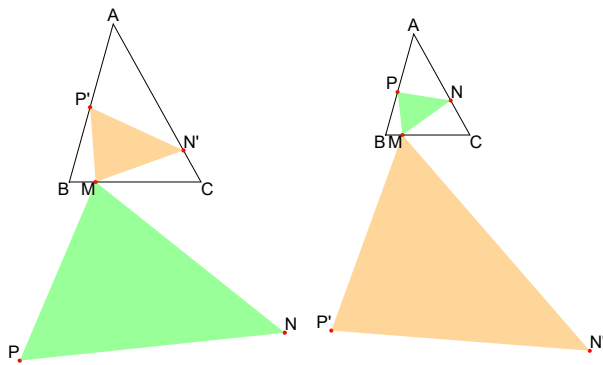
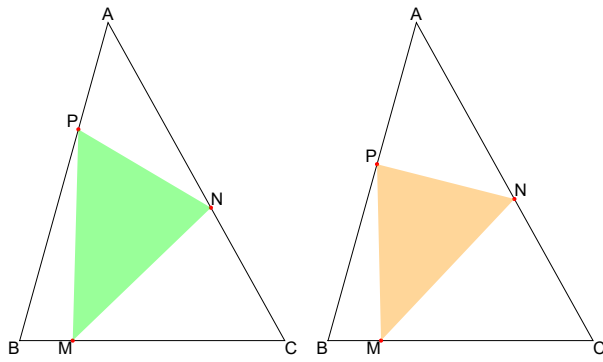
$\frac{|MP|^2}{|NP|^2} = |AB|^2$, $\frac{|MN|^2}{|NP|^2} = |AC|^2$. Obtendríamos una solución única como antes cuyo dibujo es



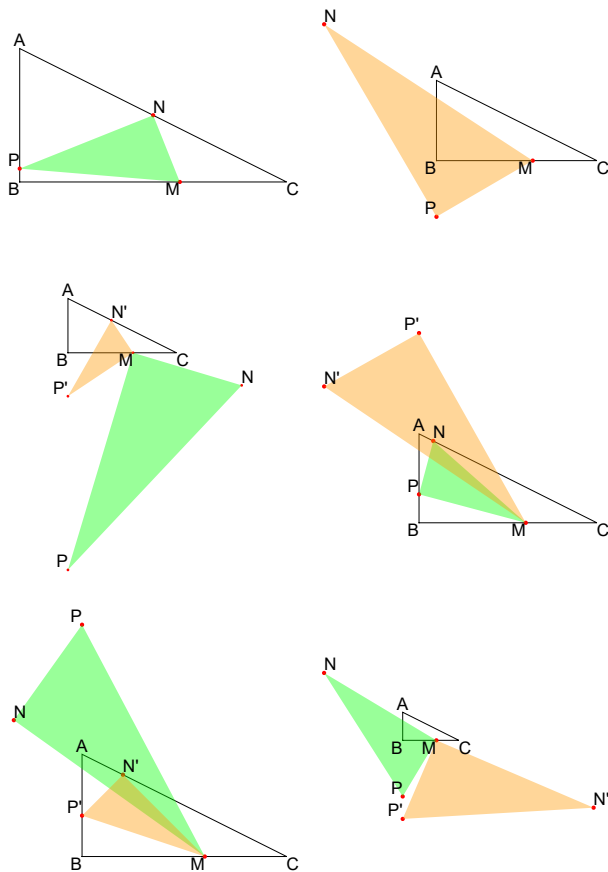
Para las restantes semejanzas procederíamos de la misma manera con la diferencia de que en vez de obtener una única solución aparecen dos. Calculemos los semejantes a BAC . Podemos usar las proporciones $\frac{MN}{MP} = \frac{BA}{BC}$ y $\frac{NP}{MP} = \frac{AC}{BC}$, de las que se deriva un sistema del que obtendríamos las soluciones del siguiente dibujo



Dibujemos todas las soluciones



Cambiamos de triángulo



No es preciso hacer ninguna restricción sobre el triángulo o sobre el punto M. Si acaso variará el número de soluciones. Por ejemplo en el caso del triángulo equilátero, se reducen a una.