

Apéndice al pr. 902

Enunciado

Dado un triángulo escaleno ABC, tomemos un punto M sobre la recta BC, distinto del punto

medio de BC y de los vértices B y C.

Construir seis triángulos que

1) Tengan M como uno de sus vértices

2) Que sean semejantes a ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

3) Que los otros dos vértices de cada uno de ellos estén situados en las rectas AB y AC.

Barroso, R. (2019). Propuesta a partir de un problema de Lewis Carroll.

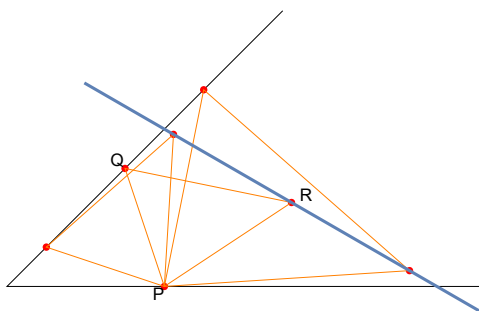
Solución (*)

por César Beade Franco

En mi solución construía 10 triángulos que cumplían las condiciones del problema sin que se viera claro porque eran únicos los semejantes a ABC y BCA y en los demás casos había 2.

La siguiente explicación usa la “solución constructiva” de Fondanaiche, en particular el método que atribuye a P. Pamfilo, que permite construirlas todas y aclarar la anomalía citada.

Un teorema



El anterior dibujo ilustra el teorema usado en la solución de Fondanaiche. Con P fijo y Q variando sobre una recta se construyen triángulos semejantes. Estos se obtienen girando PQ un ángulo $-\theta$ alrededor de P y otro ψ alrededor de Q.

Aplicación al triángulo

Vamos a usar el anterior resultado para dibujar triángulos inscritos al ABC.

Llamamos α , β y γ a los ángulos A, B y C, siendo $B=(0,0)$ y $C=(1,0)$.

En estas condiciones $A=(\cos[\beta] \csc[\beta+\gamma] \sin[\gamma], \csc[\beta+\gamma] \sin[\beta] \sin[\gamma])$.

Tomamos un punto fijo sobre BC, $P(p,0)$.

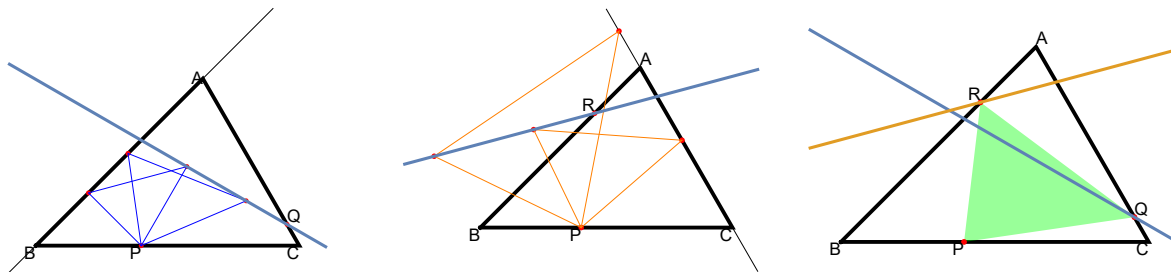
Calcularemos la recta del teorema anterior para las rectas BC y BA primero (rc) y para

CB y CA (rb).

Si PQR son los vértices del inscrito, sus ángulos son α , β y γ en algún orden, siendo $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

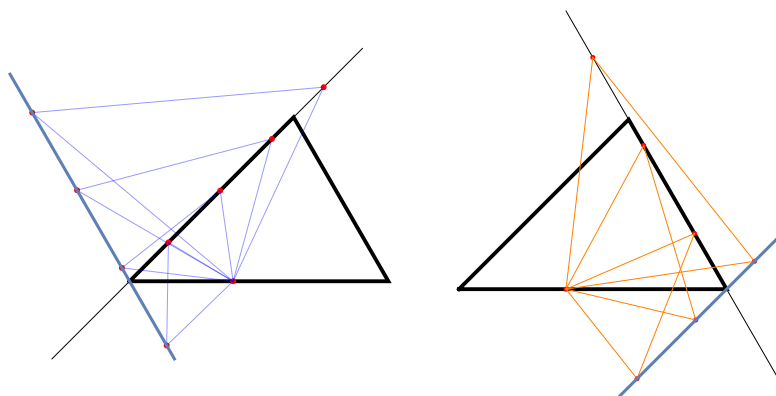
Las pendientes de AB y AC son $\tan[\beta]$ y $-\tan[\gamma]$.

ABC



Dibujamos las rectas rc y rb. En este caso el ángulo en P es α . Obtenemos rb mediante giros de valor $-\alpha$ y γ en un caso α y $-\beta$ en otro. Sus intersecciones con los lados AC y AB nos dan los vértices de PQR semejante a ABC.

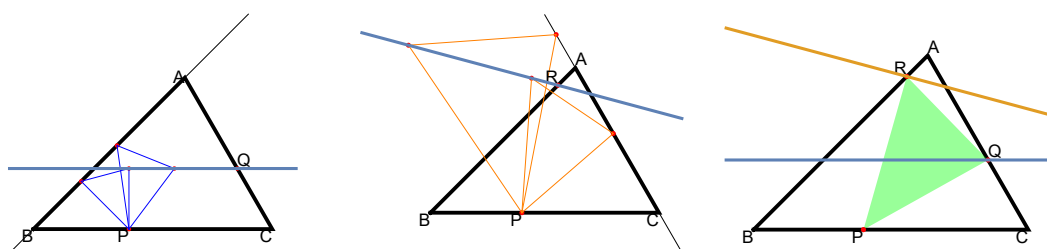
Si invertimos los giros anteriores obtenemos otras familias de triángulos semejantes que nos deberían proporcionar una segunda solución. Esto no sucede porque las rectas rc y rb son paralelas a los lados AC y AB, tal como vemos en el dibujo, por lo que no se pueden determinar los vértices Q y R.



La situación es parecida cuando PQR es semejante a ACB. Hay una sola solución que se obtiene intercambiando en la anterior β y γ .

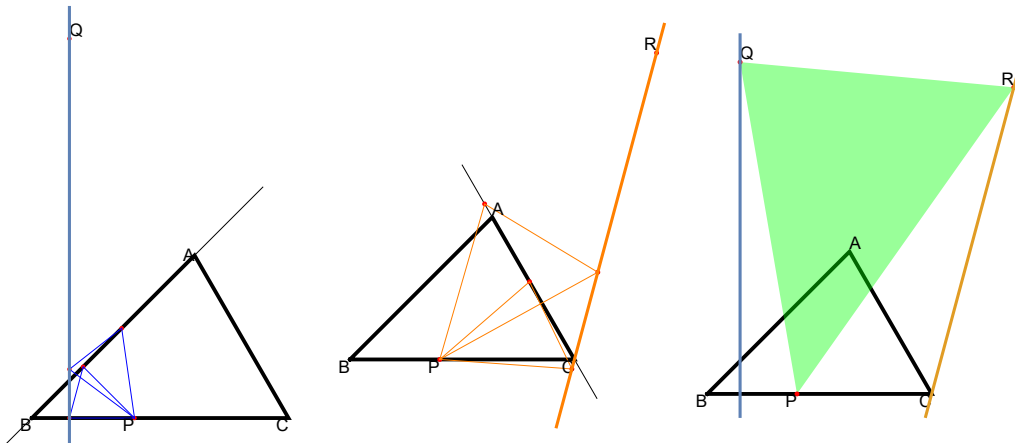
La situación cambia para las otras semejanzas como veremos.

BAC



En este caso los ángulos en P, Q y R son β , α y γ . Como antes las rectas ry y rb nos permiten dibujar el triángulo PQR semejante al BAC.

Si invertimos los ángulos de giro en cada caso obtenemos otras rectas r_y y r_b que nos proporcionan otra solución.



Para BCA, CAB y CBA la situación es análoga obteniendo siempre dos soluciones.

(*) Todas las figuras han sido obtenidas analíticamente (*Mathematica*), cuyos cálculos omito.