Problema 902.-

Dado un triángulo escaleno ABC, Tomemos un punto M sobre la recta BC, distinto del punto medio de BC y de los vértices B y C. Construir seis triángulos que:

1) Tengan M como uno de sus vértices
2) Que sean semejantes a ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
3) Que los otros dos vértices de cada uno de ellos estén situados en las rectas AB y AC.

Barroso, R. (2019): Propuesta a partir de un problema de Lewis Carroll.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Hecho Geométrico 1.- (Teorema de Miquel)

(Problema 294_Laboratorio)

Para un triángulo ABC y tres puntos $A', B', y\ C'$, uno en cada uno de sus lados, las tres circunferencias de Miquel son las que pasan por cada vértice y los puntos sobre dichos lados ($es\ decir, por\ AC'B', BA'C', y\ C\ B'A'$).

De acuerdo con el teorema de Miquel, las circunferencias de Miquel son concurrentes en un punto M conocido como punto de Miquel.

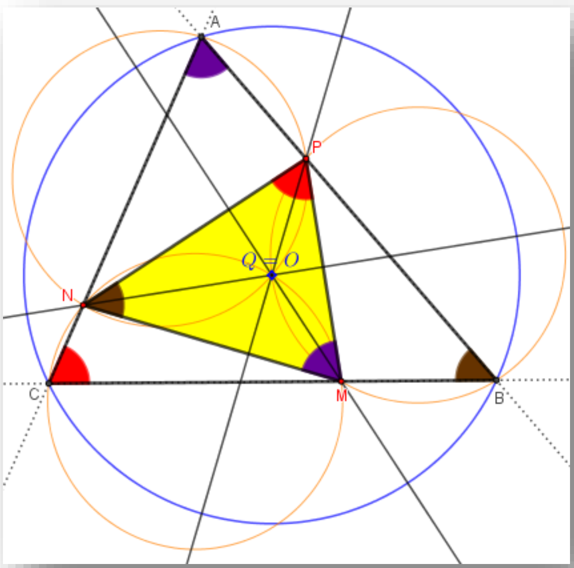
Hecho Geométrico 2.-

Dado un triángulo ABC, si el triángulo $A'B'C'$ está inscrito en ABC y es semejante al mismo, entonces el Punto de Miquel es el Circuncentro del triángulo ABC y, a su vez, Ortocentro del triángulo $A'B'C'$.

$Dem.-$

Por el Teorema anterior, las circunferencias de Miquel asociadas al triángulo ABC y los puntos MNP, tenemos que se cortan en un punto Q.

Ahora vamos a ver que este punto Q es O (=Circuncentro de ABC y Ortocentro de MNP).



** Q es el Circuncentro de ABC.*

Para ello, observamos la siguiente igualdad entre ángulos

$\measuredangle QCB = \measuredangle QCM = \measuredangle QNM.$

Ahora bien,

$\measuredangle QNM = \frac{\pi}{2} - \measuredangle M = \frac{\pi}{2} - \measuredangle A$

Por tanto, $\measuredangle QCB = \frac{\pi}{2} - \measuredangle A.$

Como esto será también válido para los ángulos $\measuredangle B\ y\ \measuredangle C$, se tendrá que Q será el Circuncentro de ABC.

** Q es el Ortocentro de MNP.*

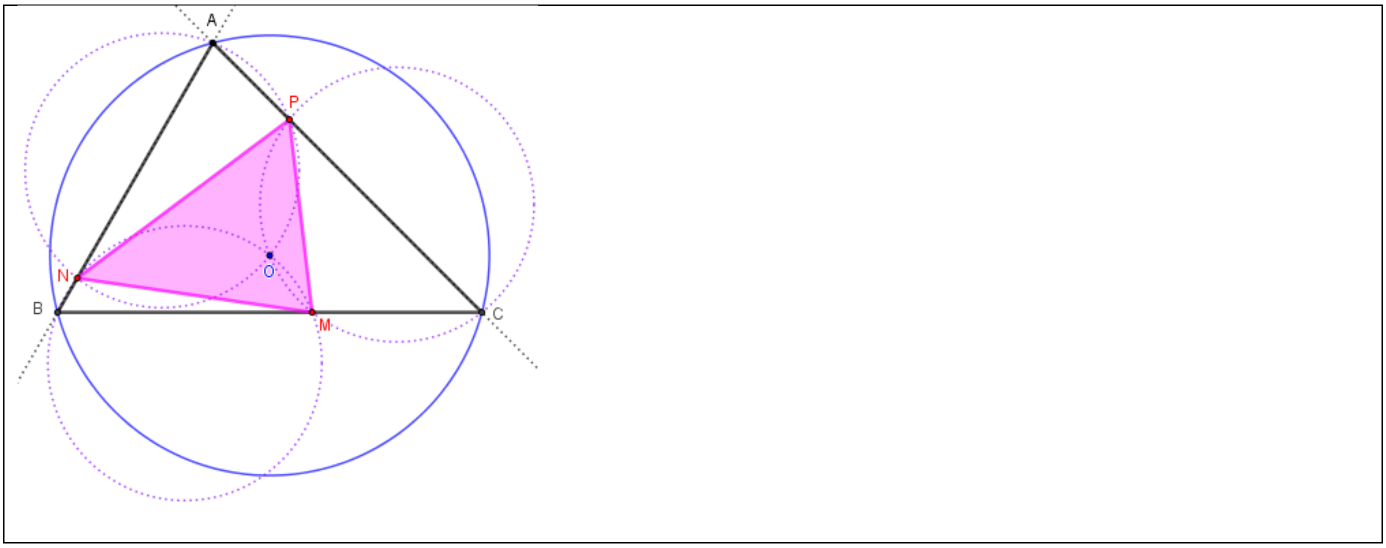
$\measuredangle NQM = \pi - \measuredangle C = \pi - \measuredangle NPM.$

Por tanto, $\measuredangle NQM = \left(\frac{\pi}{2} - \measuredangle PMN\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \measuredangle MNP\right).$

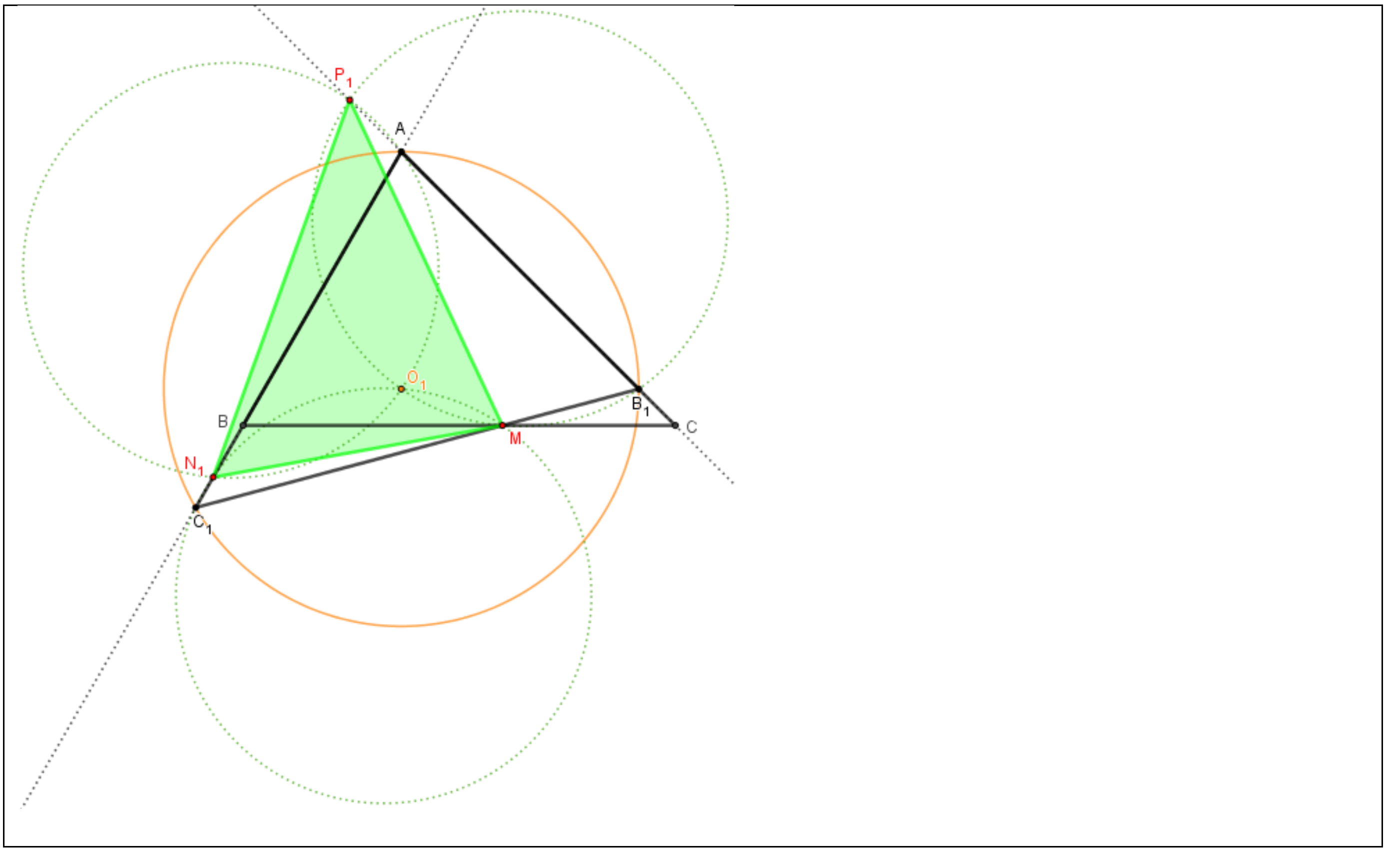
Como esto será también válido para los ángulos $\measuredangle NQP\ y\ \measuredangle PQM$ se tendrá que Q será el Ortocentro de MNP.

Hecho Geométrico 3.- Procedimiento para inscribir un triángulo semejante al ABC dado y teniendo como uno de sus vértices el punto dado M sobre el lado BC.

Caso _1: Construcción del triángulo MNP, semejante al ACB, siendo $M = \measuredangle A, N = \measuredangle C, P = \measuredangle B.$



Caso _2: Construcción del triángulo MN_1P_1, semejante al ABC, siendo $M = \measuredangle A, N = \measuredangle B, P = \measuredangle C.$
Construimos ahora una antiparalela en el triángulo ABC al ángulo $\measuredangle A$. Así, resultaría el "nuevo" triángulo $A_1C_1B_1$, semejante al ABC. A continuación, ya seguimos el mismo procedimiento que en el caso 3_1. El resultado es el siguiente.



Para los siguientes casos, donde en el punto M vamos a situar los ángulos en B y C, vamos a usar la Geometría de Coordenadas y el Programa Mathematica como sigue.

Supongamos un caso particular y concreto para ilustrar el procedimiento. Sea el triángulo ABC de ángulos $75\,°, 60°\ y\ 45°$, **respectivamente. Sea además el punto** $M = (6, 0)$.

A partir de las ecuaciones de los giros adecuados sobre el punto M, obtenemos las siguientes soluciones:

(Mathematica)

RESOLUCIÓN → {BAC → M == ÁNGULO_B; N == ÁNGULO_A; P = ÁNGULO_C}; {BCA → M == ÁNGULO_B; N == ÁNGULO_C; P = ÁNGULO_A}

$M == \{6, 0\},\ N == \{t, \sqrt{3}\ t\},\ P == \{s, 10 - s\}$

$\overrightarrow{MN} == N - M == \{t, \sqrt{3}\ t\} - \{6, 0\}$

$\overline{MN} == -M + N == \{-6 + t, \sqrt{3}\ t\}$

$\overrightarrow{MP} == P - M == \{s, 10 - s\} - \{6, 0\}$

$\overline{MP} == -M + P == \{-6 + s, 10 - s\}$

$\overrightarrow{NP} == \{s, 10 - s\} - \{t, \sqrt{3}\ t\}$

$\overline{NP} == \{s - t, 10 - s - \sqrt{3}\ t\}$

$\overrightarrow{NM} == M - N == \{6, 0\} - \{t, \sqrt{3}\ t\}$

$\overline{NM} == M - N == \{6 - t, -\sqrt{3}\ t\}$

$$\mathrm{Cos}[60\,°]^2 == \left(\frac{\{-6+t, \sqrt{3}\ t\}.\{-6+s, 10-s\}}{\mathrm{Norm}[\{-6+t, \sqrt{3}\ t\}]\ \mathrm{Norm}[\{-6+s, 10-s\}]}\right)^2$$

$$\frac{\left((-6+s)\ (-6+t) - \sqrt{3}\ (-10+s)\ t\right)^2}{\left((10-s)^2 + (-6+s)^2\right)\ \left((-6+t)^2 + 3\ t^2\right)} == \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Cos}[45\,°]^2 == \left(\frac{\{-6+t, \sqrt{3}\ t\}.\{s-t, 10-s-\sqrt{3}\ t\}}{\mathrm{Norm}[\{-6+t, \sqrt{3}\ t\}]\ \mathrm{Norm}[\{s-t, 10-s-\sqrt{3}\ t\}]}\right)^2$$

$$\frac{\left(2\ t\ \left(-3 - 5\sqrt{3} + 2\ t\right) + s\ \left(6 + \left(-1+\sqrt{3}\right)\ t\right)\right)^2}{\left((-6+t)^2 + 3\ t^2\right)\ \left((s-t)^2 + \left(10 - s - \sqrt{3}\ t\right)^2\right)} == \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Solve}\left[\left\{\frac{\left((-6+s)\ (-6+t) - \sqrt{3}\ (-10+s)\ t\right)^2}{\left((10-s)^2 + (-6+s)^2\right)\ \left((-6+t)^2 + 3\ t^2\right)} == \frac{1}{4},\ \frac{\left(2\ t\ \left(-3 - 5\sqrt{3} + 2\ t\right) + s\ \left(6 + \left(-1+\sqrt{3}\right)\ t\right)\right)^2}{\left((-6+t)^2 + 3\ t^2\right)\ \left((s-t)^2 + \left(10 - s - \sqrt{3}\ t\right)^2\right)} == \frac{1}{2}\right\},\ \{s, t\}\right]$$

$$\left\{\left\{s \to 4\left(1 - 2\sqrt{3}\right),\ t \to 5\left(2 + \sqrt{3}\right)\right\},\ \left\{s \to 1 + 3\sqrt{3},\ t \to \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{3}\right)\right\},\ \left\{s \to 19 + 3\sqrt{3},\ t \to \frac{5}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)\right\},\ \left\{s \to 2\left(11 + 5\sqrt{3}\right),\ t \to 4 + 3\sqrt{3}\right\}\right\}$$

Caso_ 1_ Válido

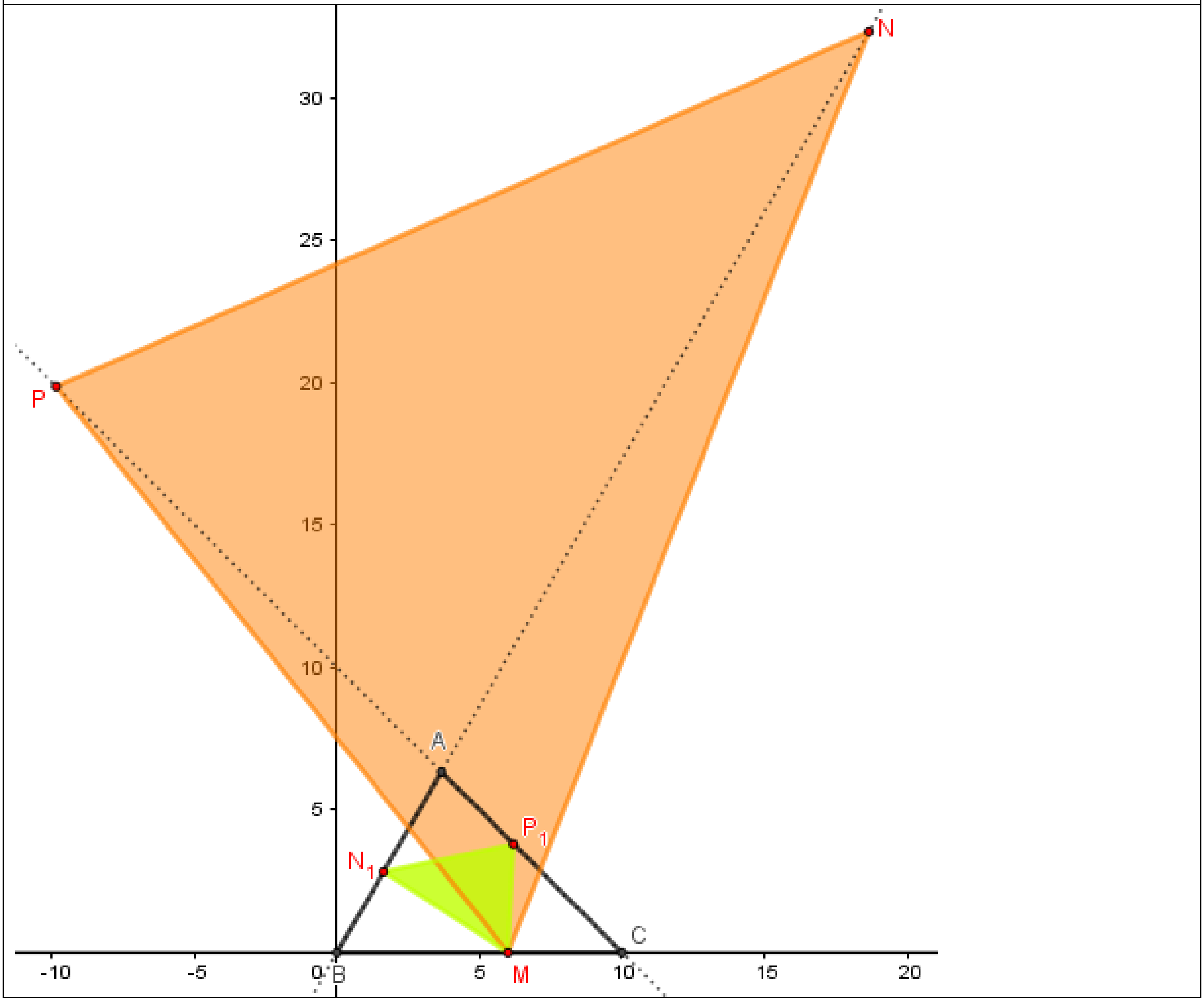
$\{\{t, \sqrt{3}\ t\}, \{s, 10-s\}\}$ /. $\{s \to 4(1-2\sqrt{3}), t \to 5(2+\sqrt{3})\}$

$\{\{5(2+\sqrt{3}), 5\sqrt{3}\ (2+\sqrt{3})\}, \{4(1-2\sqrt{3}), 10-4(1-2\sqrt{3})\}\}$

Caso_ 2_ Válido

$\{\{t, \sqrt{3}\ t\}, \{s, 10-s\}\}$ /. $\left\{s \to 1+3\sqrt{3}, t \to \frac{1}{2}(5-\sqrt{3})\right\}$

$\left\{\left\{\frac{1}{2}(5-\sqrt{3}), \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (5-\sqrt{3})\right\}, \{1+3\sqrt{3}, 9-3\sqrt{3}\}\right\}$



RESOLUCIÓN → {CAB → M == ÁNGULO_C; N == ÁNGULO_A; P = ÁNGULO_B}; {CBA → M == ÁNGULO_C; N == ÁNGULO_B; P = ÁNGULO_A}

$M == \{6, 0\}$, $N == \{t, \sqrt{3}\, t\}$, $P == \{s, 10 - s\}$

$\overrightarrow{MN} == N - M == \{t, \sqrt{3}\, t\} - \{6, 0\}$

$\overrightarrow{MN} == -M + N == \{-6 + t, \sqrt{3}\, t\}$

$\overrightarrow{MP} == P - M == \{s, 10 - s\} - \{6, 0\}$

$\overrightarrow{MP} == -M + P == \{-6 + s, 10 - s\}$

$\overrightarrow{NP} == \{s, 10 - s\} - \{t, \sqrt{3}\, t\}$

$\overrightarrow{NP} == \{s - t, 10 - s - \sqrt{3}\, t\}$

$\overrightarrow{NM} == M - N == \{6, 0\} - \{t, \sqrt{3}\, t\}$

$\overrightarrow{NM} == M - N == \{6 - t, -\sqrt{3}\, t\}$

$$\text{Cos}[45\,°]^2 == \left(\frac{\{-6 + t, \sqrt{3}\, t\}.\{-6 + s, 10 - s\}}{\text{Norm}[\{-6 + t, \sqrt{3}\, t\}]\ \text{Norm}[\{-6 + s, 10 - s\}]}\right)^2$$

$$\frac{\left(-36 + 6 s + 6 t - 10 \sqrt{3}\, t - s t + \sqrt{3}\, s t\right)^2}{8 \left(68 - 16 s + s^2\right) \left(9 - 3 t + t^2\right)} == \frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}[75\,°]^2 == \left(\frac{\{s - t, 10 - s - \sqrt{3}\, t\}.\{6 - t, -\sqrt{3}\, t\}}{\text{Norm}[\{s - t, 10 - s - \sqrt{3}\, t\}]\ \text{Norm}[\{6 - t, -\sqrt{3}\, t\}]}\right)^2$$

$$\frac{\left(2 t \left(-3 - 5 \sqrt{3} + 2 t\right) + s \left(6 + \left(-1 + \sqrt{3}\right) t\right)\right)^2}{\left((6 - t)^2 + 3 t^2\right) \left((s - t)^2 + \left(10 - s - \sqrt{3}\, t\right)^2\right)} == \frac{1}{4} \left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$\text{Solve}\left[\left\{\frac{\left(-36 + 6 s + 6 t - 10 \sqrt{3}\, t - s t + \sqrt{3}\, s t\right)^2}{8 \left(68 - 16 s + s^2\right) \left(9 - 3 t + t^2\right)} == \frac{1}{2}, \frac{\left(2 t \left(-3 - 5 \sqrt{3} + 2 t\right) + s \left(6 + \left(-1 + \sqrt{3}\right) t\right)\right)^2}{\left((6 - t)^2 + 3 t^2\right) \left((s - t)^2 + \left(10 - s - \sqrt{3}\, t\right)^2\right)} == \frac{1}{4} \left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}, \{s, t\}\right]$$

$$\left\{\left\{s \to \frac{1}{3} \left(15 - 7 \sqrt{3}\right), t \to \frac{2}{3} \left(3 - \sqrt{3}\right)\right\}, \left\{s \to -1 - 5 \sqrt{3}, t \to 2 \left(2 + \sqrt{3}\right)\right\}, \left\{s \to 5 \left(1 - \sqrt{3}\right), t \to 2 \left(6 - \sqrt{3}\right)\right\}, \left\{s \to \frac{1}{3} \left(15 - \sqrt{3}\right), t \to 2 \left(-1 + \sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

Caso_ 3_ Válido

$\{\{t, \sqrt{3}\ t\}, \{s, 10 - s\}\}$ /. $\{s \to 5(1 - \sqrt{3}), t \to 2(6 - \sqrt{3})\}$

$\{\{2(6 - \sqrt{3}), 2\sqrt{3}(6 - \sqrt{3})\}, \{5(1 - \sqrt{3}), 10 - 5(1 - \sqrt{3})\}\}$

Caso_ 4_ Válido

$\{\{t, \sqrt{3}\ t\}, \{s, 10 - s\}\}$ /. $\left\{s \to \frac{1}{3}(15 - \sqrt{3}), t \to 2(-1 + \sqrt{3})\right\}$

$\left\{\{2(-1 + \sqrt{3}), 2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{3})\}, \left\{\frac{1}{3}(15 - \sqrt{3}), 10 + \frac{1}{3}(-15 + \sqrt{3})\right\}\right\}$