Problema 902

Dado un triángulo escaleno ABC, Tomemos un punto M sobre la recta BC, distinto del punto medio de BC y de los vértices B y C.

Construir seis triángulos que

1) Tengan M como uno de sus vértices

2) Que sean semejantes a ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

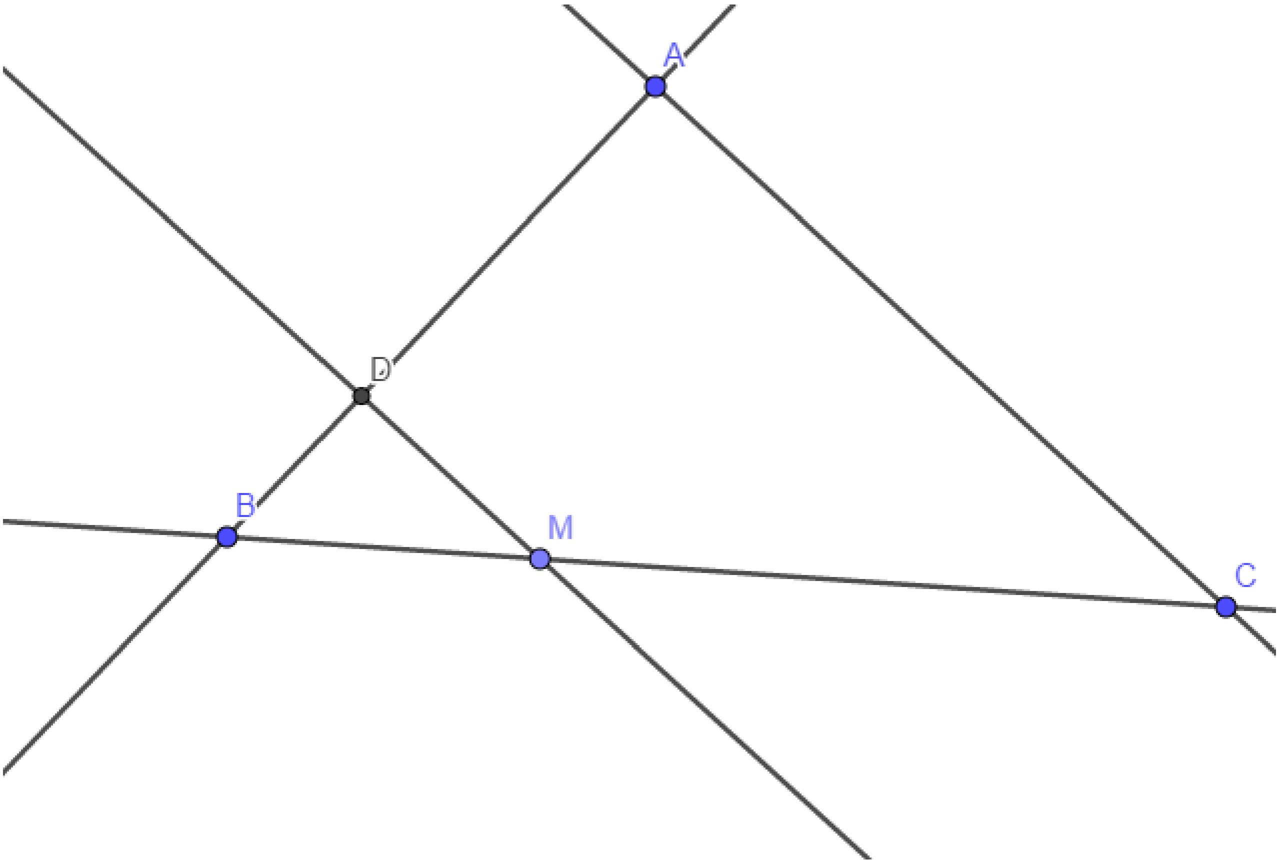
3) Que los otros dos vértices de cada uno de ellos estén situados en las rectas AB y AC.

[Errata del enunciado,, corregido el 4 de Febrero. MI agradecimiento al profesor Florentino Damián Aranda Ballesteros, por la advertencia.]

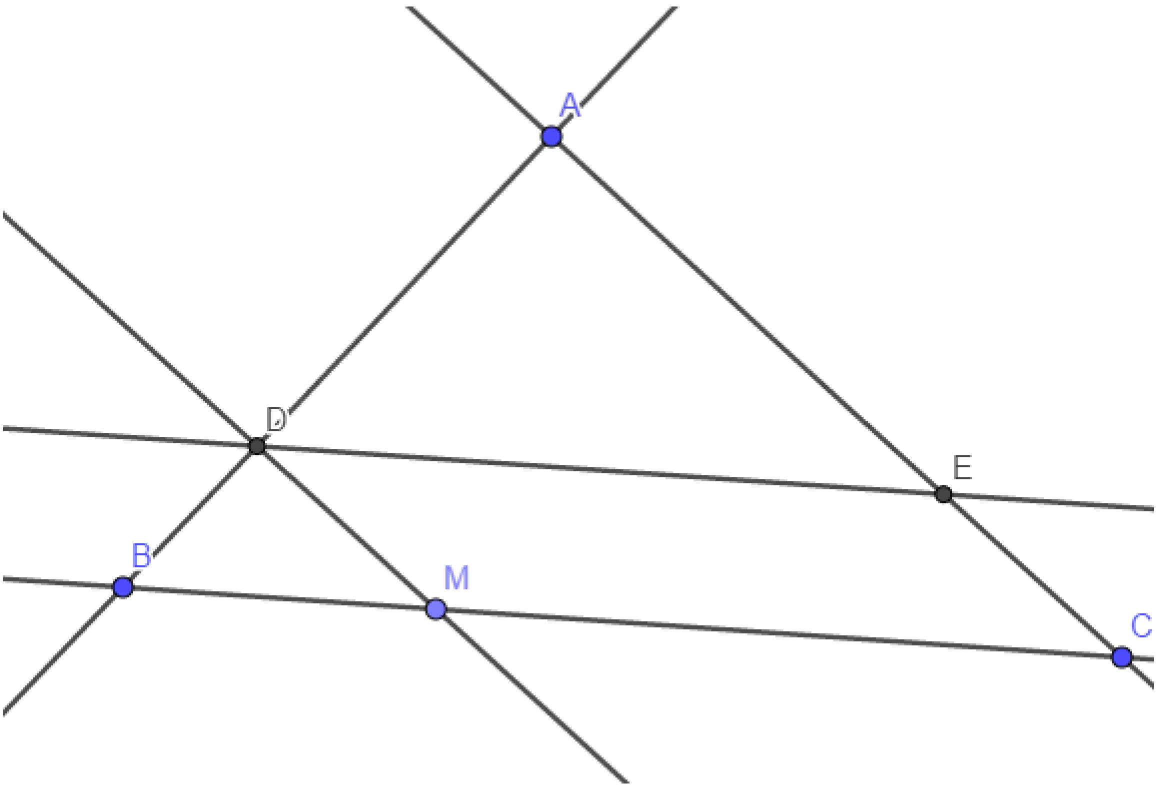
Barroso, R. (2019). Propuesta a partir de un problema de Lewis Carroll.
Solución del director.

Sea ABC el triángulo y M en BC.

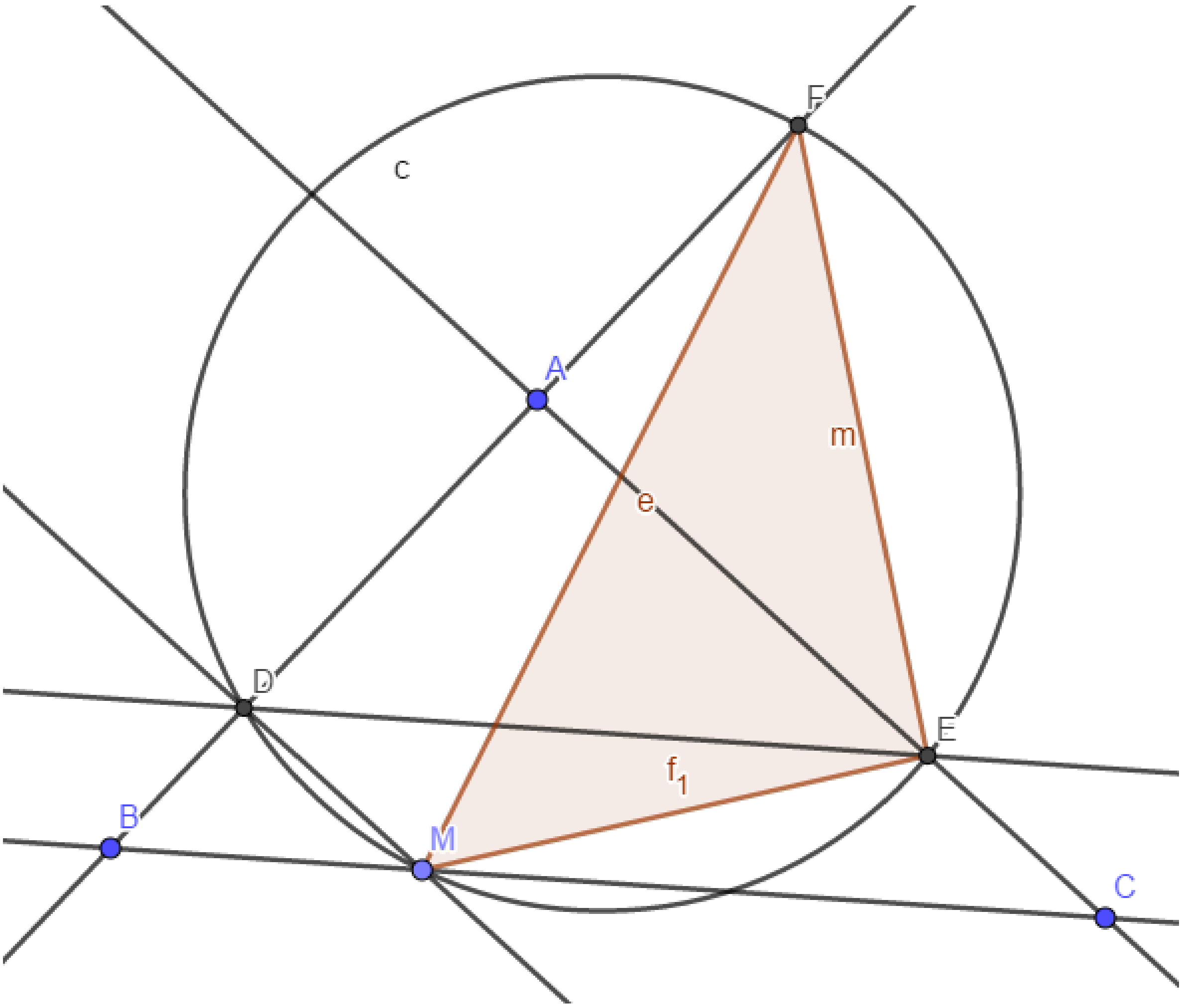
Tomemos una paralela a AC por M , que cortará a AB en D. A partir de D tendremos dos soluciones.



Tomemos una paralela por D a BC. Cortará a AC en E

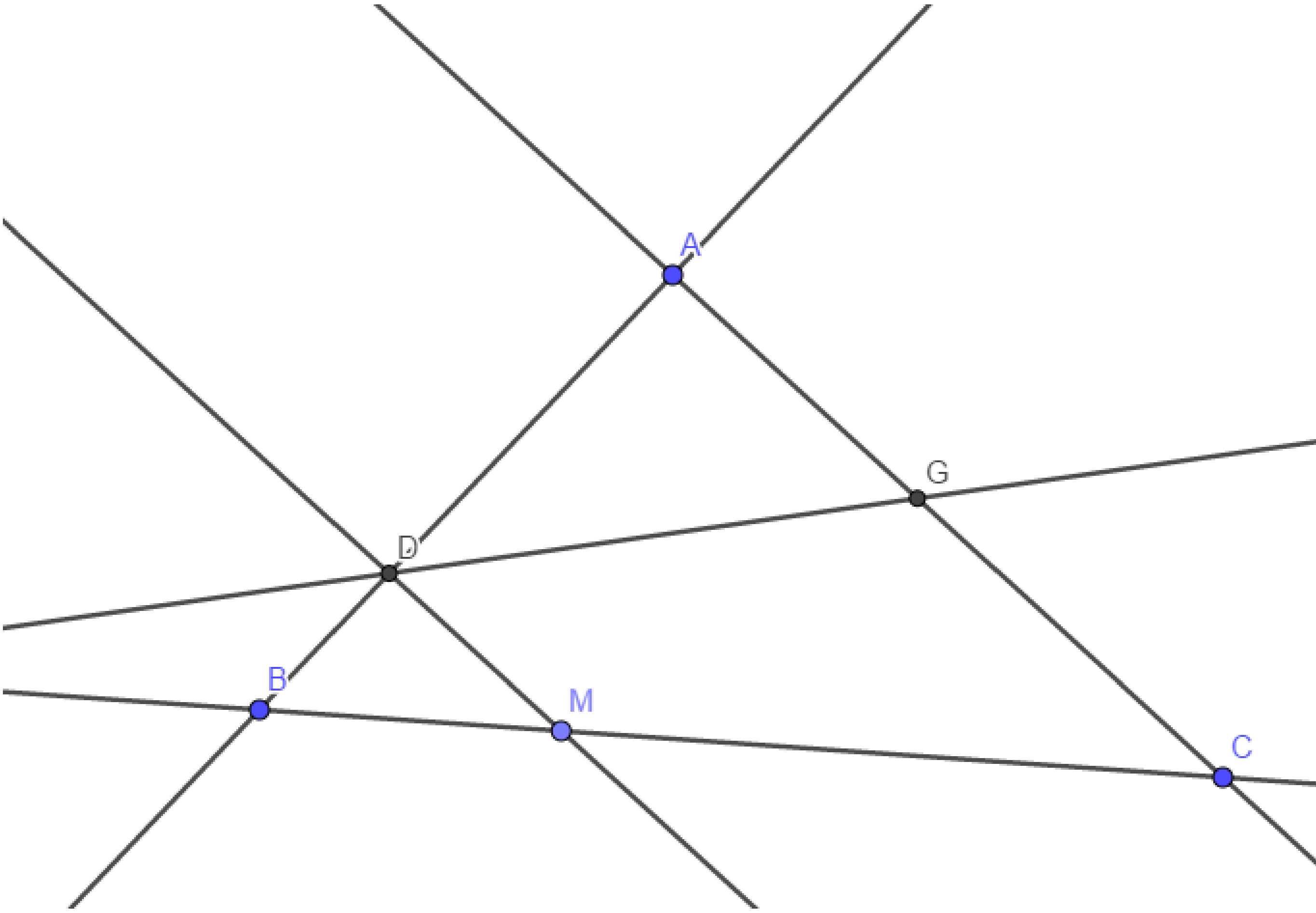


Tracemos la circunferencia MED que cortará de nuevo a AB en F.

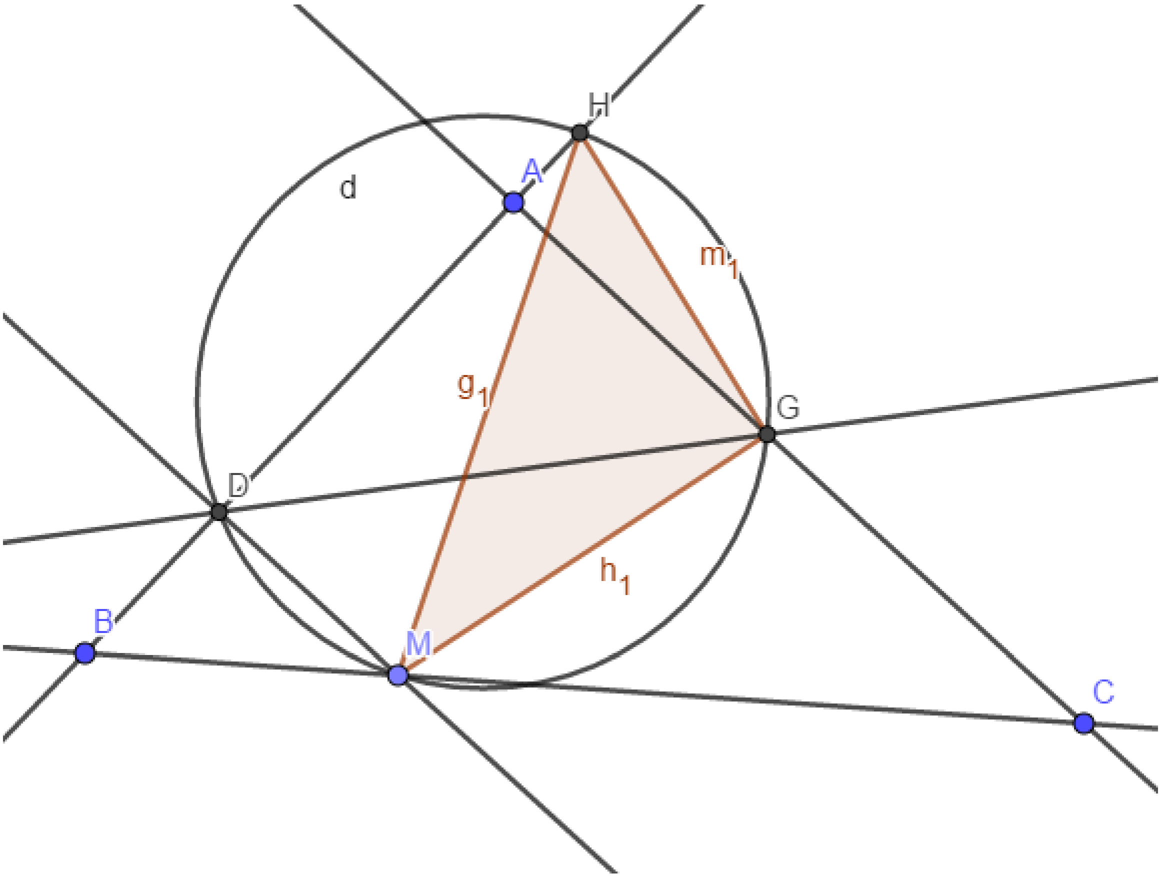


$\angle MFE = \angle MDE = \gamma, \angle FME = \angle FDE = \beta, \angle FEM = \alpha$, así MEF es semejante a BAC

Consideremos ahora la recta MD girada un ángulo β con G en la recta AC tal que ∠GDM =β.



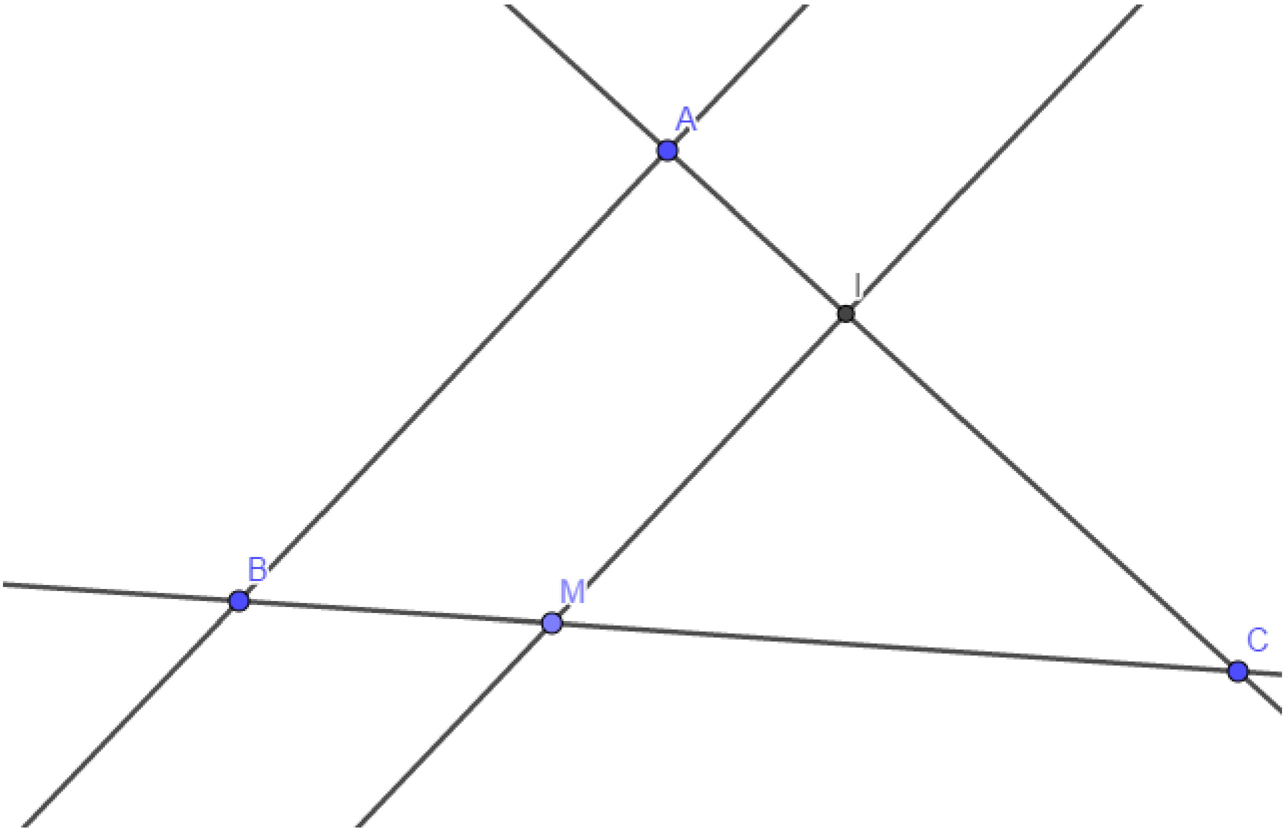
Tracemos la circunferencia GMD que volverá a cortar a AB en H:



Tenemos:$\angle MHG = MDG = \beta, \angle HMG = \angle HDG = \gamma, por\ lo\ que\ \angle MGH = \alpha$, por lo que el triángulo

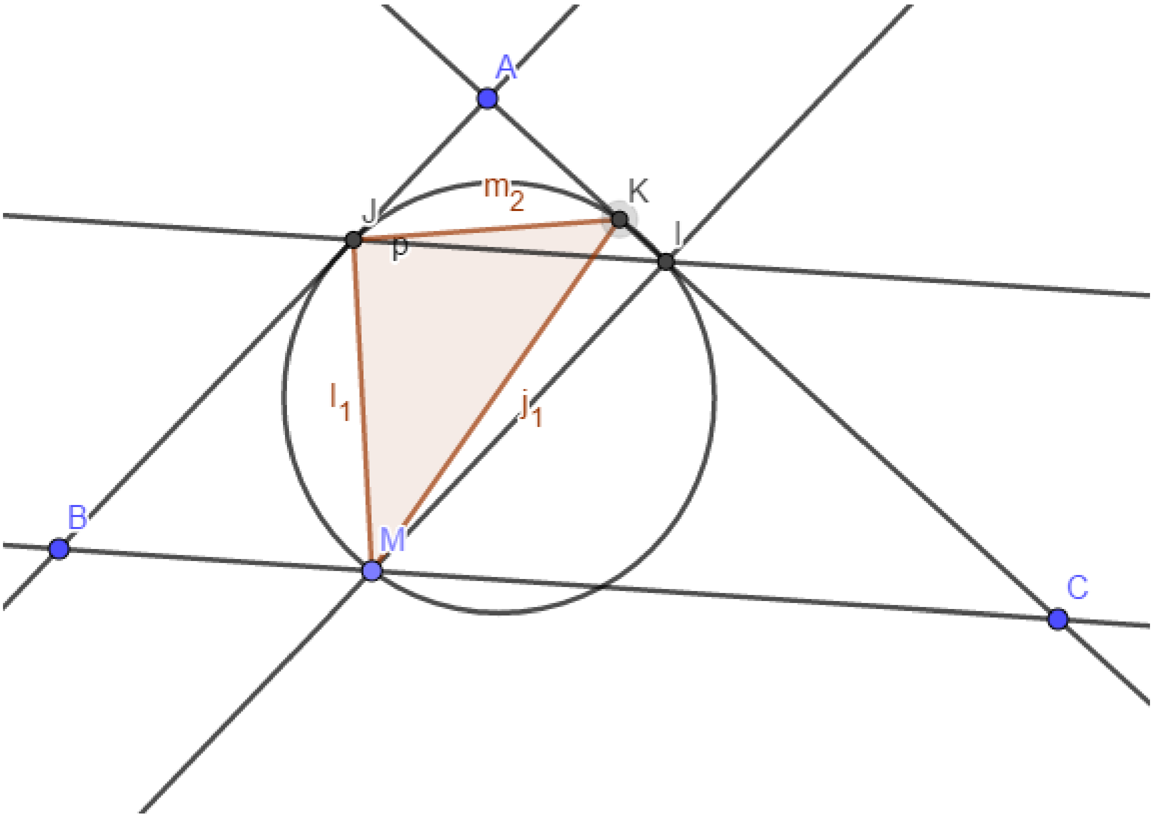
MHG es semejante al CBA.

Tracemos ahora la paralela por M a BA. Cortará a AC en I



Tendremos otros dos semejantes:

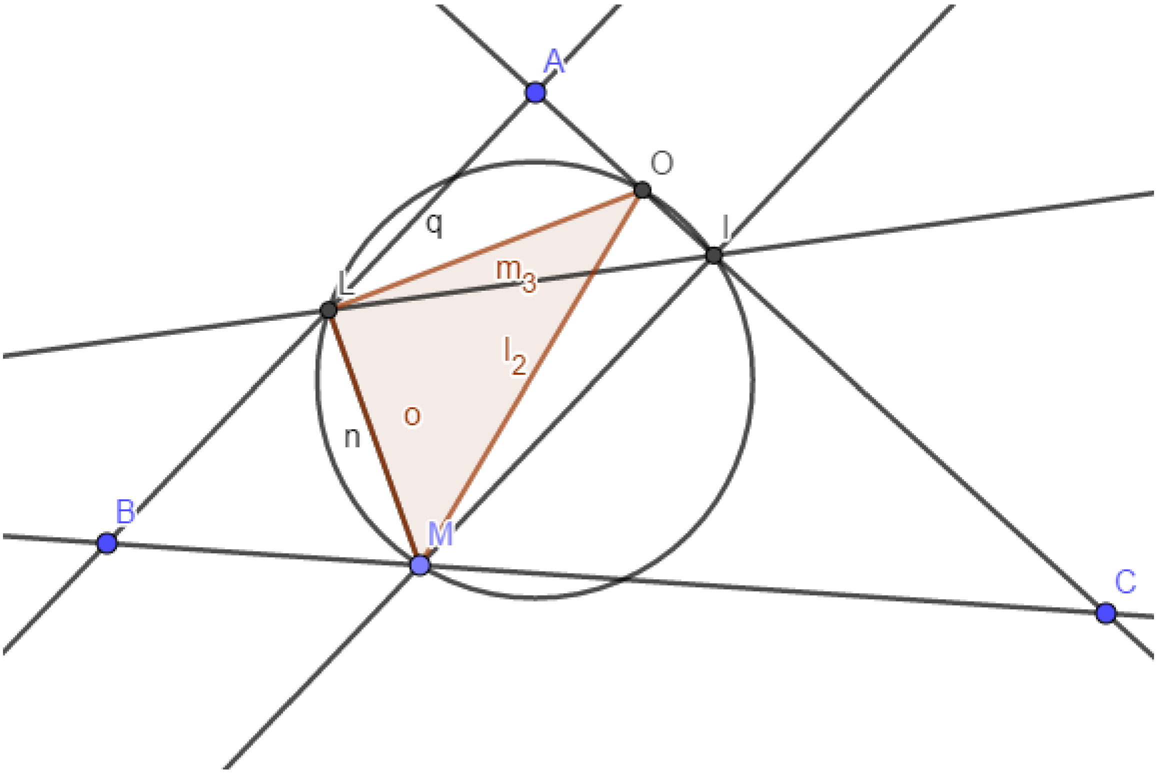
Por I tracemos una paralela a BC que cortará a AB en J



La circunferencia KIJ cortará en K a AC.

Tenemos: $\angle JKM = JIM = \beta$, $\angle KMJ = \angle KIJ = \gamma$, por lo que $\angle KJM$=α

Así el triángulo MJK es semejante al CAB.

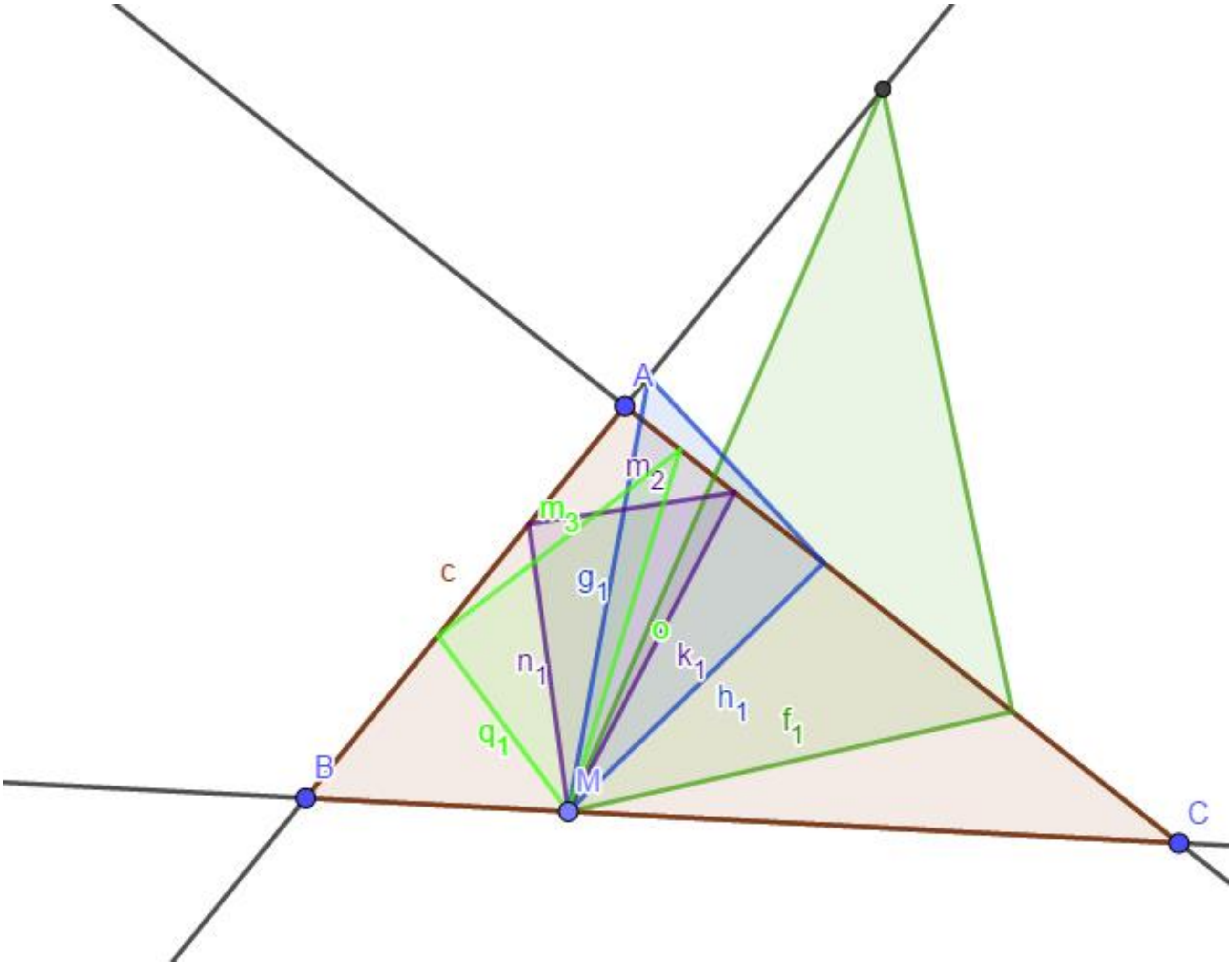


Giremos ahora la recta MI un ángulo γ que cortará a AB en L. La circunferencia MIL volverá a cortar a AC en O.

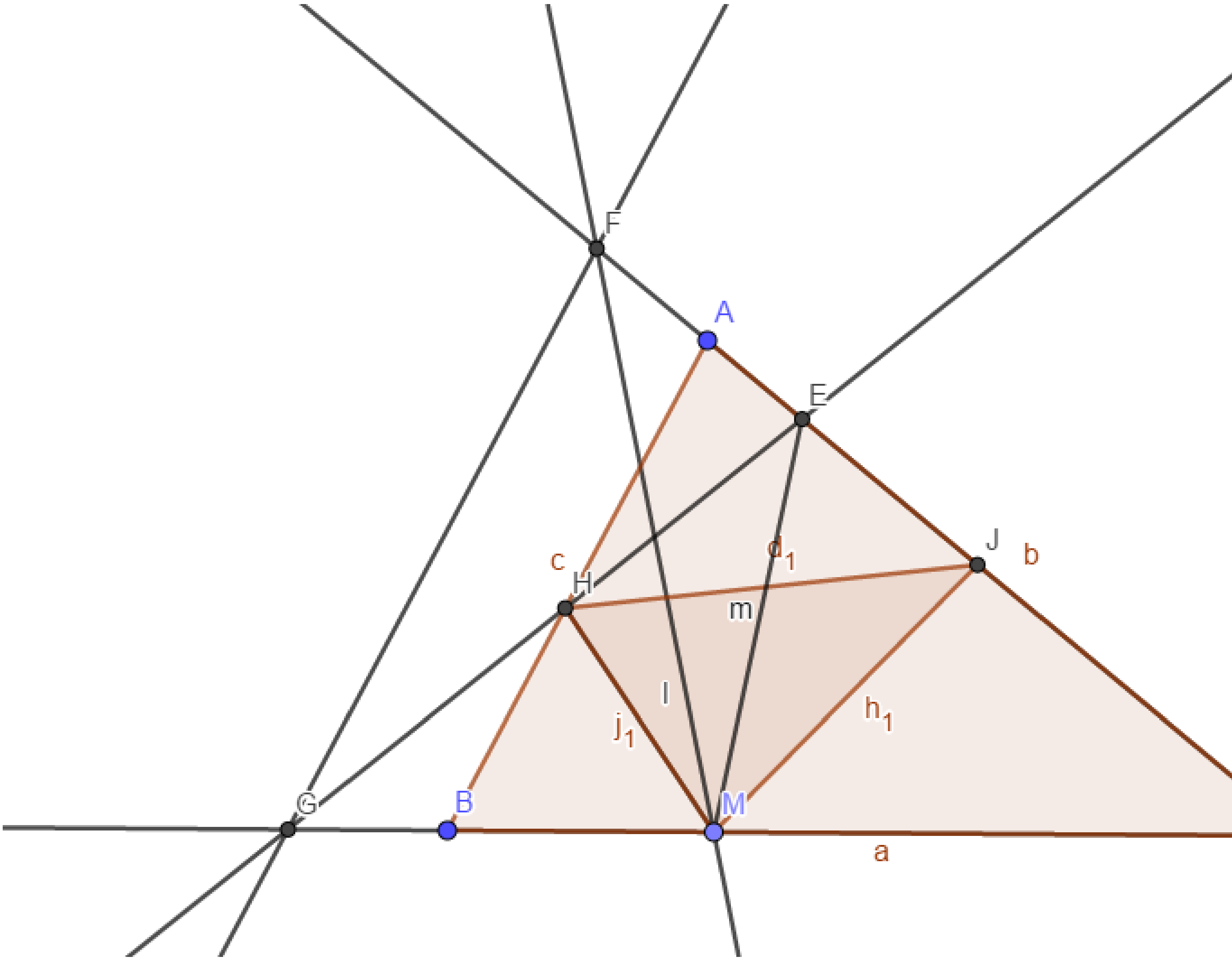
Observemos el triángulo MOL.$\angle MOL = MIL = \gamma, \angle OML = \angle OIL = \beta, por\ lo\ que\ \angle OLM = \alpha.$

Así, el triángulo MOL es semejante al BCA.

Tenemos así cuatro triángulos:



Continuemos trazando , en una figura con nuevas denominaciones

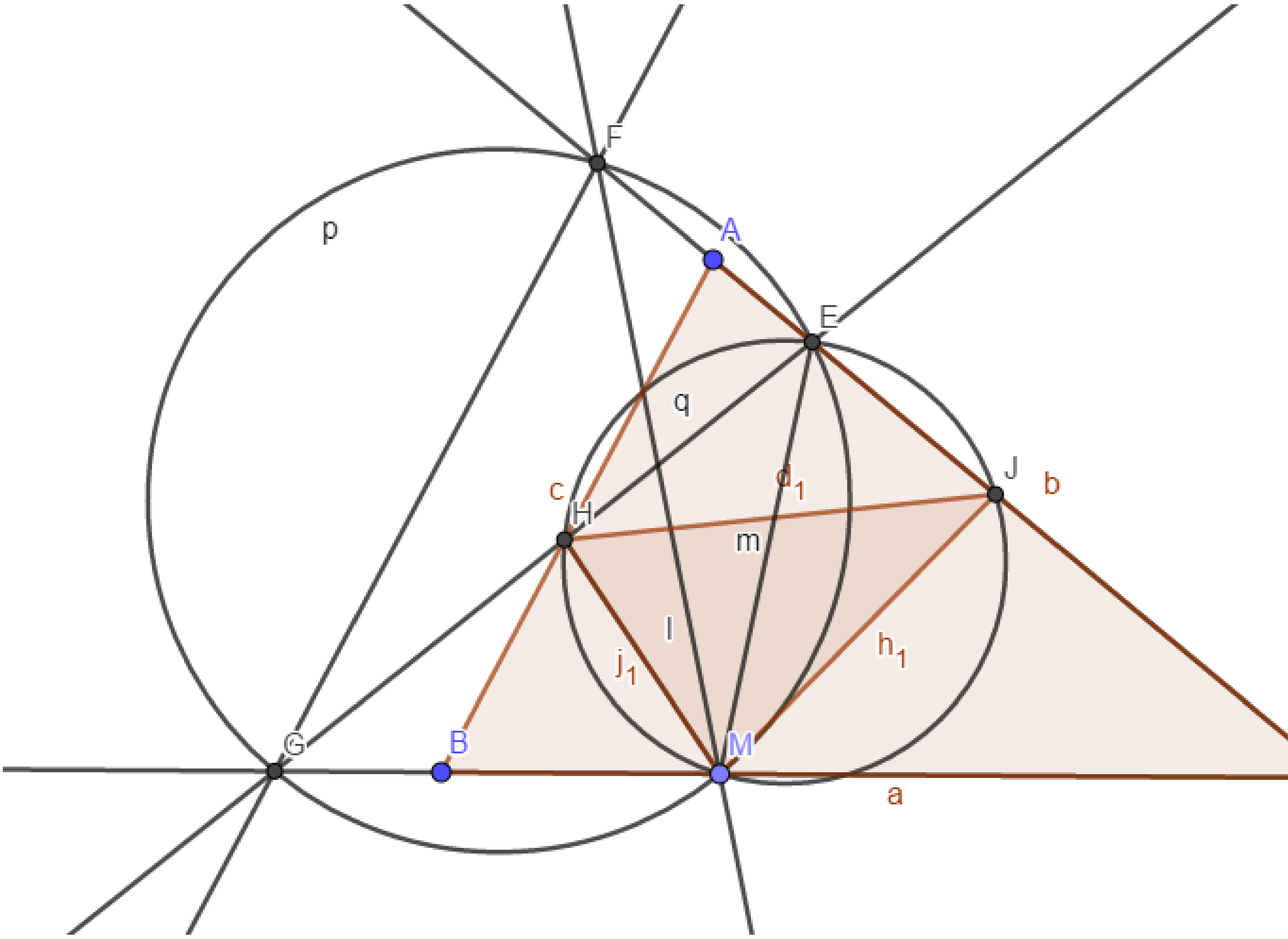


Sea E sobre la recta AC tal que $\angle EMC = \alpha$, por lo que BAEM serán concíclicos.

Sea F en la recta AC tal que $\angle FMB = \alpha$, y G sobre BC tal que $\angle FGM = \beta$. Así, GFEM son concíclicos.

EG cortará a AB en H. La circunferencia MHE volverá a cortar a AB en J.

Observemos ángulos.

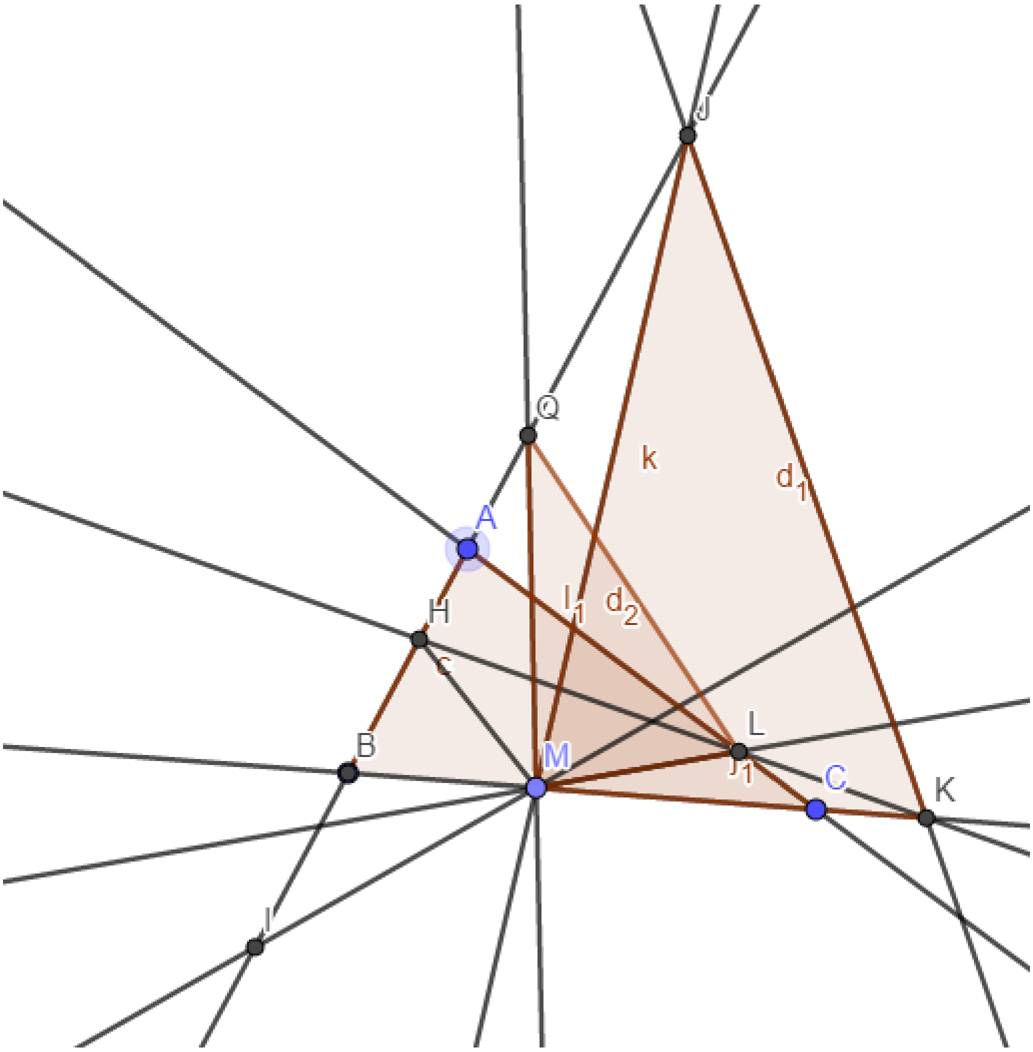


Tenemos: $\angle HJM = \angle HEM = \angle GEM = \angle GFM = \gamma$, $\angle JHM = \angle JEM = \beta$

$\angle$

Por lo que $\angle HMJ = \alpha$, así el triángulo MHJ es semejante al ABC.

Volviendo a nuevas denominaciones, tenemos la figura



Que se forma de esta manera:

Tomemos el triángulo MHI tal que H sea de AB, con$\angle MHI = \beta$, I sea de la recta AB con $\angle$MIH=γ

Tomemos el triángulo MKJ con K en BC, J en AB, y$\angle KMJ = \alpha \ \ \angle MJK = \gamma$, $\angle MKJ = \beta$,

HK cortará a AC en L.

La circunferencia MHL cortará a AB otra vez en Q.

El triángulo MQL es semejante al ACB y termina el problema.

Dejo al lector la comprobación de este último triángulo.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla