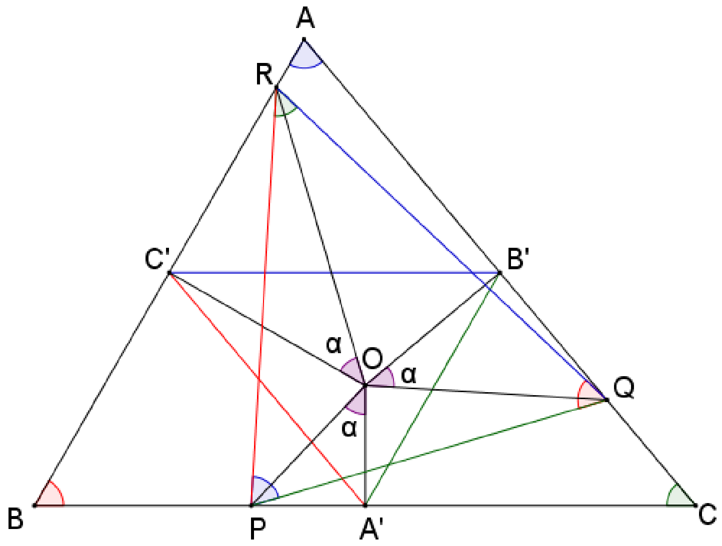
Problema 902
Dado un triángulo escaleno ABC.
Tomemos un punto P sobre la recta BC, distinto del punto medio de BC y de los vértices B y C.
Construir seis triángulos que
1) Tengan P como uno de sus vértices
2) Que sean semejantes a ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
3) Que los otros dos vértices de cada uno de ellos estén situados en las rectas AB y AC.

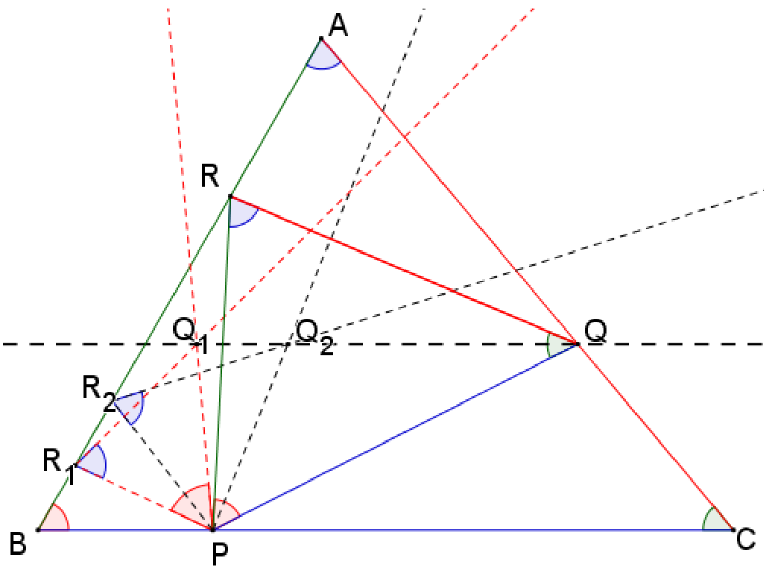
Solution proposée par Philippe Fondanaiche

1^er^ cas: le triangle PQR est semblable au triangle ABC



Soit P un point du côté BC. Il s'agit de tracer un triangle PQR semblable au triangle ABC avec le sommet Q sur AC et le sommet R sur AB.
On trace le triangle médial A'B'C' du triangle ABC en joignant les milieux A',B',C' des côtés BC,AC et AB. Ce triangle médial a ses côtés parallèles à ceux du triangle ABC et admet le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC pour orthocentre.Les deux triangles ont les mêmes angles et sont donc semblables.
Par ailleurs, OA',OB' et OC' sont respectivement perpendiculaires à BC,AC et AB.
Soit l'angle $\alpha = \angle$ A'OP mesuré dans le sens horaire.
On effectue une transformation de même angle α orienté et de même rapport $1/\cos(\alpha)$ qui amène B' en Q sur AC et C' en R sur AB. Le triangle PQR qui admet toujours le point O pour orthocentre est semblable au triangle A'B'C'. Il est donc semblable au triangle ABC.

Autres cas : le triangle PQR est semblable aux triangles BCA,BAC,CAB,CBA,ACB

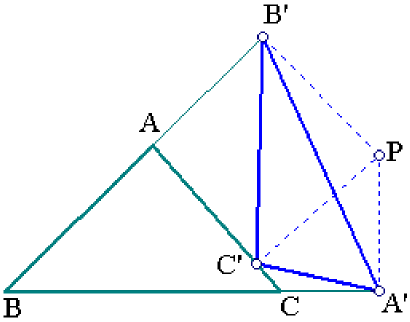


Pour résoudre les cinq autres cas, nous utilisons le même mode de construction tel que décrit par Paris Pamfilos sur son site Geometrikon (voir annexe)
On cherche, par exemple, le triangle PQR semblable au triangle BCA.
Soit R_1 un point quelconque du côté AB. On trace le triangle PQ_1R_1 semblable au triangle BAC avec les droites $[PQ_1]$ et $[R_1Q_1]$ déterminées respectivement par les angles $\angle Q_1PR_1 = \angle ABC$ et $\angle PR_1Q_1 = \angle BAC$ avec la droite $[PR_1]$ et qui se coupent en Q_1.
On opère de même avec un second point R_2 sur AB et l'on obtient le triangle PQ_2R_2 semblable au triangle ABC. D'après le théorème des triangles semblables pivotant au tour d'un point fixe, quand les points C_1,C_2,..glissent sur le côté AB, les points Q_1,Q_2,... glissent sur une même droite $[Q_1Q_2]$ qui rencontre le côté AC en un point Q. Il ne reste plus qu'à tracer le point R sur AB à l'intersection de la demi-droite [QR] avec le côté AB tel que $\angle PQR = \angle BCA$.
Le triangle PQR est semblable au triangle BCA.

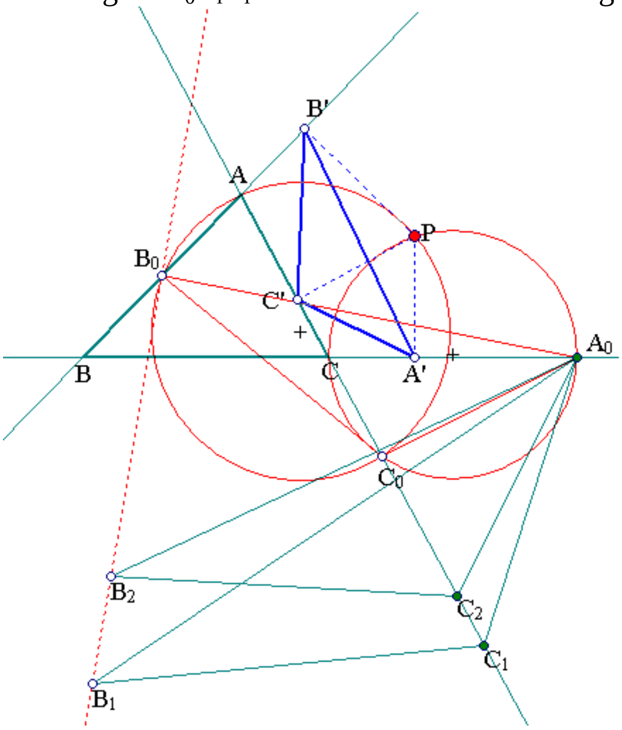
Annexe

Source Site Geometrikon de Paris Pamfilos
http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/Gallery.html
http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/Pivot.html

Construction of an inscribed triangle similar to a gievn triangle.
There is an elementary construction of an inscribed triangle similar to A'B'C' and its corresponding pivot P for each one of the twelve possible configurations discussed in section 2. In this section I construct the case in which the vertices {A', B', C'} are respectively on the sides {BC, BA, AC} and the orientation is that of ABC.



The construction of a triangle with this prescriptions (similar to A'B'C' and inscribed in this way in ABC) can be carried out in the following way.
Select an arbitrary point A_0 on BC and an arbitrary point C_1 on CA. Construct a triangle $A_0B_1C_1$ similar to A'B'C' and oriented according to the prescription. Fix A_0 and repeat the construction with a second auxiliary point C_2 on CA delivering a second triangle $A_0B_2C_2$ similar to A'B'C'. By well known theorem on similar triangles pivoting around a fixed point and having one vertex (C_i) gliding on a line (see reference (1) below), the other vertex will glide also on a fixed line. Thus line B_1B_2 is the fixed line on which vertex B_i will glide for all triangles $A_0B_iC_i$ similar to A'B'C and having C_i gliding on CA.



Let C_0 be the particular point on AC for which triangle $A_0B_0C_0$ is similar to A'B'C' and B_0 is the intersection of line B_1B_2 with AB. Triangle $A_0B_0C_0$ satisfies the prescriptions. Its pivot P can be found by intersecting two of the circumcircles of {AB_0C0, BB_0A_0, CC_0A_0} since all three pass through it.