

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 903A. (Perrin, D., Mathématiques d'école, nombre, mesures et géométrie. Cassini (pág. 242)) Sean ABC un triángulo y D y E dos puntos situados en los segmentos CA y BA , respectivamente. Si las rectas BD y CE se cortan en el punto M , ¿pueden tener igual área los triángulos BME , CMB y DMC ?

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si:

$$\begin{cases} D = (d : 0 : 1-d) & \left(\begin{array}{l} 0 < d < 1 \\ 0 < e < 1 \end{array} \right) \\ E = (e : 1-e : 0) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} BD \equiv 0 = (d-1)x + dz \\ CE \equiv 0 = (e-1)x + ey \end{cases} \Rightarrow M = (de : d(1-e) : e(1-d))$$

por lo que, si las áreas de los tres triángulos considerados coincidiesen, tendríamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{(BME) - (CMB)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ de & d(1-e) & e(1-d) \\ e & 1-e & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ de & d(1-e) & e(1-d) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{d+e-de} = \frac{e(d-e+de)}{d+e-de} \\ 0 = \frac{(BME) - (DMC)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ de & d(1-e) & e(1-d) \\ e & 1-e & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} d & 0 & 1-d \\ de & d(1-e) & e(1-d) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{d+e-de} = e-d \end{array} \right.$$

es decir:

$$\begin{cases} 0 = e(d-e+de) \\ 0 = e-d \end{cases} \Rightarrow d=0=e \rightarrow \text{imposible}$$

y se llega a una contradicción. Por tanto, los triángulos BME , CMB y DMC no pueden tener igual área.

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 903B. (Perrin, D., Mathématiques d'école, nombre, mesures et géométrie. Cassini (pág. 242)) En un triángulo ABC , la mediatriz del lado AC corta al segmento AC en el punto M y al segmento AB en el punto T . ¿Cuál es la condición para que el área del triángulo AMT sea igual a la cuarta parte del área del triángulo ABC ? ¿Y si la mediatriz del lado AC corta al lado AB fuera del segmento AB ? Dar una construcción de tal ejemplo.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como $M = (1 : 0 : 1)$ y la ecuación de la mediatriz correspondiente al segmento AC es:

$$m_{AC} \equiv 0 = b^2x + (a^2 - c^2)y - b^2z$$

entonces:

$$\begin{cases} T = (c^2 - a^2 : b^2 : 0) \\ \text{ó} \\ T = (a^2 - c^2 : -b^2 : 0) \end{cases}$$

por lo que:

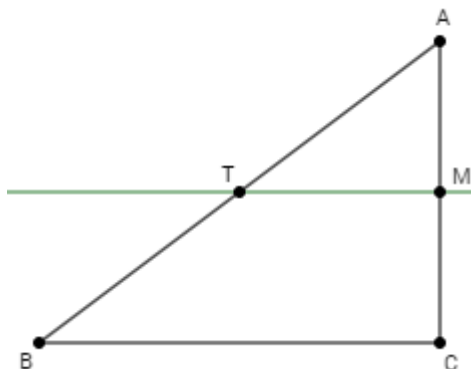
① Si el punto T está situado en el interior del segmento AB , como $T = (c^2 - a^2 : b^2 : 0)$, resulta que:

$$\frac{1}{4} = \frac{(MAT)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c^2 - a^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix}}{2(-a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{b^2}{2(-a^2 + b^2 + c^2)}$$

por lo que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

es decir, el triángulo ABC ha de ser rectángulo en C .



TRIÁNGULOS CABRI

- ② Si el punto T está situado en el exterior del segmento AB , como $T = (a^2 - c^2 : -b^2 : 0)$, entonces, el punto T debe estar situado en la semirrecta BA , por lo que:

$$\frac{1}{4} = \frac{(MTA)}{(ABC)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c^2 - a^2 & b^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2(-a^2 + b^2 + c^2)} = -\frac{b^2}{2(-a^2 + b^2 + c^2)}$$

luego:

$$a^2 = 3b^2 + c^2$$

Dado un segmento BC de longitud a , considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio O del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), resulta que:

$$0 = a^2 - 3b^2 - c^2$$

$$0 = 4 - 3[(x-1)^2 + y^2] - [(x+1)^2 + y^2]$$

$$0 = -4(x^2 - x + y^2)$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre la circunferencia de ecuación:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

es decir, el punto A debe estar situado sobre la circunferencia con diámetro OC .

