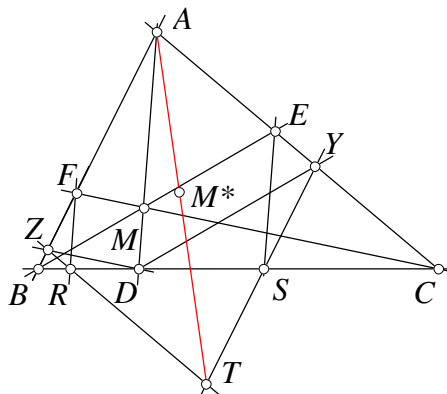


Problema 904 de triángulos cabri. Sean AD , BE y CF las tres alturas del triángulo ABC . Se trazan las perpendiculares DY y DZ sobre los lados CA y AB , y desde los puntos E y F las perpendiculares ES y FR sobre BC . Las rectas ZR e YS se cortan sobre la simediana de A .

D'Ocagne, M. (1884): Note sur la symédiane. *Nouvelles annales de mathématiques* 3^a Série, tome 3. p. 28

Solución de Francisco Javier García Capitán. ¿Qué tienen que ver las alturas del triángulo con las simedianas, o el ortocentro con el punto simediano? Descubrámoslo generalizando el enunciado propuesto.

Para ello, consideramos un punto cualquiera $M = (x : y : z)$ y su triángulo ceviano DEF . Trazamos las rectas DY , paralela a BE , y DZ paralela a CF , con Y sobre CA y Z sobre AB y trazamos también las paralelas FR y ES a AD , con R, S sobre BC . ¿Cuál es el punto T de intersección de las rectas SY y ZR ?



Calculando los puntos

$$D = (0 : y : z), \quad E = (x : 0 : z), \quad F = (x : y : 0),$$

$$Y = (xy : 0 : (x + y + z)z), \quad Z = (xz : (x + y + z)y : 0),$$

$$R = (0 : (x + y + z)y : xz), \quad S = (0 : xy : (x + y + z)z),$$

obtenemos finalmente que

$$T = (-yz(2x + y + z) : y(x + z)(x + y + z) : (x + y)z(x + y + z)),$$

que está sobre la ceviana correspondiente al vértice A del punto

$$M^* = (x(y + z) : y(z + x) : z(x + y)),$$

el complemento del conjugado isotómico de M .

Por tanto, el enunciado será cierto si el punto simediano es el complemento del conjugado isotómico del ortocentro.

El ortocentro es $H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ y su conjugado isotómico es $H' = (S_A : S_B : S_C)$, con suma $S_W = S_A + S_B + S_C = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. Como el baricentro es, $G = (\frac{1}{3}S_W : \frac{1}{3}S_W : \frac{1}{3}S_W)$, con la misma suma, el complemento de H' , es decir el punto que divide

el segmento GH' en la razón $-1 : 3$, que obtenemos teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{1}{3}S_W, \frac{1}{3}S_W, \frac{1}{3}S_W\right) - (S_A, S_B, S_C) \\ &= (S_W - S_A, S_W - S_B, S_W - S_C) = (a^2, b^2, c^2), \end{aligned}$$

es el punto $(a^2 : b^2 : c^2)$, es decir, se trata del punto simediano del triángulo ABC .