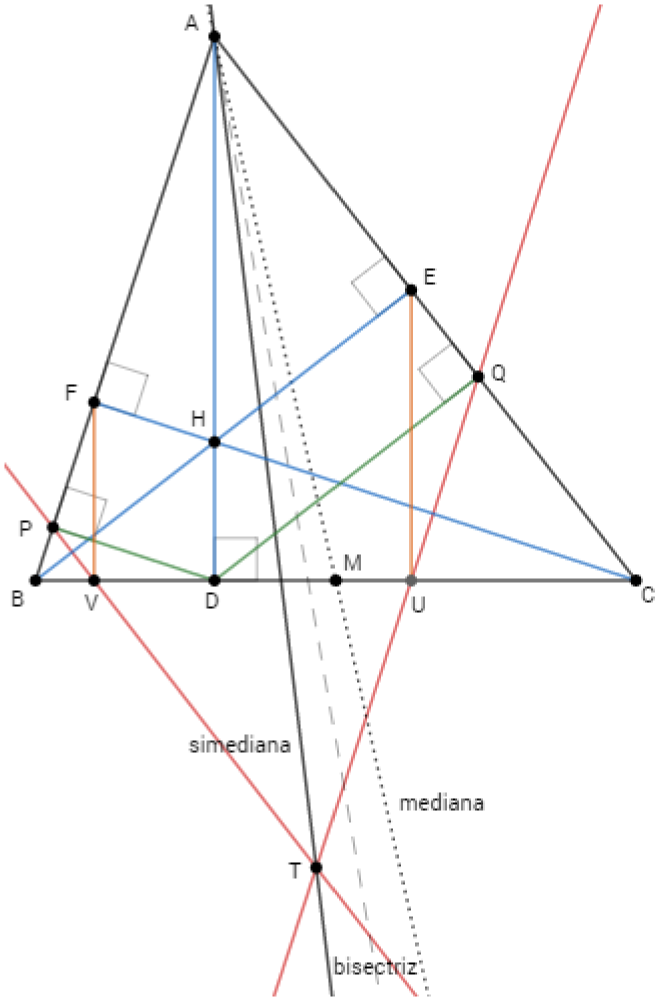
Problema 904. (D'Ocagne, M. (1884): Note sur la syméidane. Nouvelles annales de mathematiques, 3ª serie, tome 3, pág. 28) Sean AD, AE y AF las tres alturas de un triángulo ABC. Se trazan las rectas perpendiculares DP y DQ sobre los lados AB y AC, respectivamente, y, desde los puntos E y F, se trazan las rectas perpendiculares EU y FV sobre el lado BC. Probar que las rectas PV y QU se cortan en un punto T situado sobre la simediana del triángulo ABC correspondiente al vértice A.



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como el triángulo DEF es el triángulo ceviano del ortocentro $H = (S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B)$, utilizando la notación de Conway, resulta que:

$$\begin{cases} D = A_A = (0 : S_C : S_B) \\ E = B_B = (S_C : 0 : S_A) \\ F = C_C = (S_B : S_A : 0) \end{cases}$$

por lo que, si S es el doble del área del triángulo ABC, como:

$$S^2 = S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C$$

entonces:

$$\begin{cases} P = C_D = (S_B^2 : S^2 : 0) \\ Q = B_D = (S_C^2 : 0 : S^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} U = A_E = (0 : S_C^2 : S^2) \\ V = A_F = (0 : S^2 : S_B^2) \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} PV \equiv 0 = S^2x - S_B^2y + S^2z \\ QU \equiv 0 = S^2x + S^2y - S_C^2z \end{cases}$$

y, por tanto:

$$T = PV \cap QU = (S_A((b^2-c^2)^2 - a^2(b^2+c^2)) : 2b^2S^2 : 2c^2S^2)$$

Finalmente, como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_A((b^2-c^2)^2 - a^2(b^2+c^2)) & 2b^2S^2 & 2c^2S^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b^2S^2 & 2c^2S^2 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

entonces, el punto A, el punto simediano $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ y el punto T están alineados, es decir, el punto T está situado sobre la simediana AK.

```
ptX = {x, y, z};
```

```
{ptD, ptE, ptF} = {Pie[ptA, rtBC], Pie[ptB, rtCA], Pie[ptC, rtAB]}
```

$$\{\{0,\ a^2+b^2-c^2,\ a^2-b^2+c^2\},\ \{a^2+b^2-c^2,\ 0,\ -a^2+b^2+c^2\},\ \{a^2-b^2+c^2,\ -a^2+b^2+c^2,\ 0\}\}$$

```
{ptP, ptQ} = {Pie[ptD, rtAB], Pie[ptD, rtCA]}
```

$$\{\{(a^2-b^2+c^2)^2,\ -a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2),\ 0\},\ \{(a^2+b^2-c^2)^2,\ 0,\ -a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2)\}\}$$

```
{ptU, ptV} = {Pie[ptE, rtBC], Pie[ptF, rtBC]}
```

$$\{\{0,\ (a^2+b^2-c^2)^2,\ -a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2)\},\ \{0,\ -a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2),\ (a^2-b^2+c^2)^2\}\}$$

```
{rtPV, rtQU} = {Recta[ptP, ptV], Recta[ptQ, ptU]}
```

$$\{\{-a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2),\ -(a^2-b^2+c^2)^2,\ -a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2(b^2+c^2)\},\ \{a^4+(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2+c^2),\ a^4+(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2+c^2),\ (a^2+b^2-c^2)^2\}\}$$

```
ptT = Punto[rtPV, rtQU]
```

$$\{-a^4(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)+2a^2(b^4+c^4),\ b^2(a^4+(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2+c^2)),\ c^2(a^4+(b^2-c^2)^2-2a^2(b^2+c^2))\}$$

```
EstanAlineados[{ptA, ptK, ptT}]
```

True

```
rtAK = Recta[ptA, ptK]
```

$$\{0,\ -c^2,\ b^2\}$$

```
simediana = rtAK.ptX
```

$$-c^2\,y+b^2\,z$$

```
Sustituirxyz[simediana, ptT]
```

0