

Problema 904

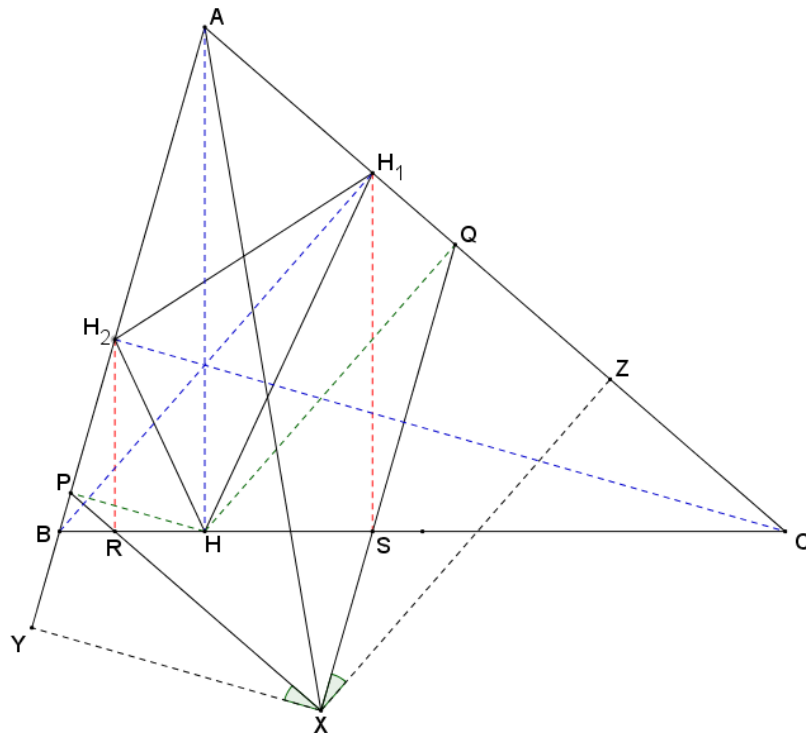
Sean AH , BH_1 y CH_2 las tres alturas del triángulo ABC .

Se trazan las perpendiculares HP y HQ sobre los lados AB y AC y desde los puntos H_1 y H_2 las perpendiculares H_1S y H_2R sobre BC .

Las rectas PR y QS se cortan sobre la simediana de A .

D'Ocagne, M. (1884): Note sur la symédiane. Nouvelles annales de mathématiques 3^a Série, tome 3. p. 28

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme (supposé connu): dans un triangle quelconque les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

Les droites $[PR]$ et $[QS]$ se rencontrent au point X . On va démontrer que **les distances XY et XZ de X aux côtés AB et AC sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.**

Par construction la droite $[HH_1]$ qui joint les pieds des hauteurs issues de A et de C dans le triangle ABC et la droite $[AB]$ sont antiparallèles. De la même manière les droites $[HH_2]$ et $[AC]$ sont antiparallèles.

Dans le triangle BHH_2 , la droite $[PR]$ qui joint les pieds des hauteurs issues de H et de H_2 et la droite $[HH_2]$ sont antiparallèles. Il en résulte que la droite $[PR]$ est parallèle à la droite $[AC]$.

Il en est de même avec la droite $[QS]$ qui est antiparallèle de la droite $[HH_1]$ et est donc parallèle à la droite $[AB]$. Le quadrilatère $APXQ$ est donc un parallélogramme.

Comme $\angle XPY = \angle XQZ$, les deux triangles rectangles XPY et XQZ sont semblables.

On en déduit les relations : $XY/XZ = XP/XQ = AQ/AP$.

Or $AP = AH \cdot \cos(\angle BAH) = AH \cdot \sin(\angle ABC)$ et $AQ = AH \cdot \cos(\angle CAH) = AH \cdot \sin(\angle ACB)$.

D'où $XY/XZ = AQ/AP = \sin(\angle ACB)/\sin(\angle ABC)$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABC , on a $AB/AC = \sin(\angle ACB)/\sin(\angle ABC)$.

Donc $XY/XZ = AB/AC$. C.q.f.d.