

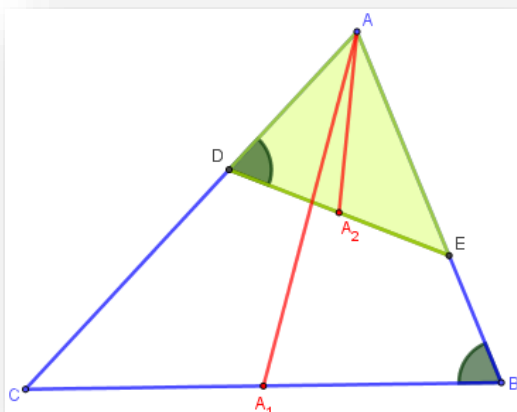
### Problema 905.-

Teorema 8.4. Sea  $T_a$  el punto de intersección de las tangentes en B y C al circuncírculo de ABC. Entonces  $AT_a$  es una simediana del triángulo ABC.

*Leversha, G. (2013): The geometry of the triangle. (Pathways, Number Two), p. 101*

### Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

La simediana por A es el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas a BC con respecto a los lados AB y AC del triángulo ABC. Este hecho es fácilmente demostrable como se sigue a continuación:



Sea la recta DE antiparalela a BC. Por tanto, los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle ADE$  son semejantes.

Sea  $A_1$  el punto medio del lado BC.

Por tanto,  $AA_1 = m_a$  (mediana del vértice A).

Sea  $A_2$  el punto donde la simediana del vértice A corta al lado DE.

Por tanto, se verificarán las igualdades entre las parejas de ángulos siguientes:

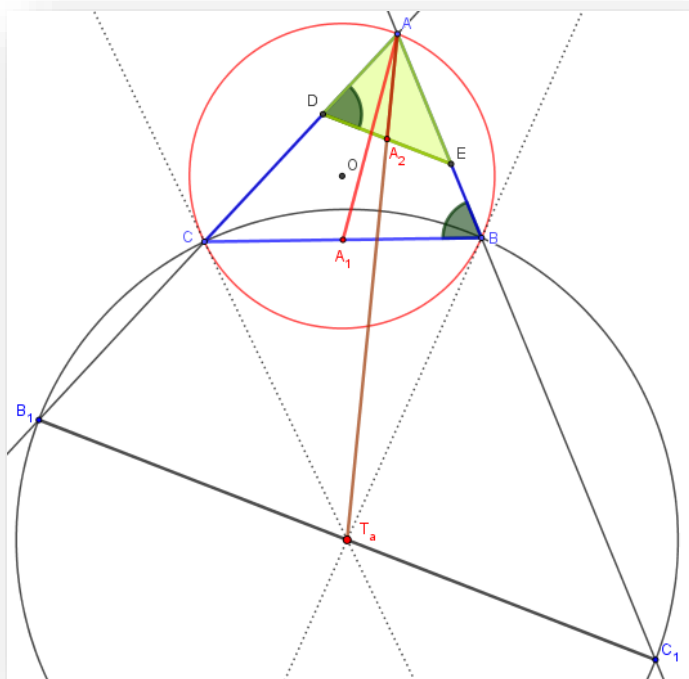
$\angle CAA_1 = \angle A_2AE$  y  $\angle DAA_2 = \angle A_1AB$ .

Así obtenemos la semejanza entre los triángulos  $\triangle ADA_2 \sim \triangle ABA_1$ .

En concreto, se dará la siguiente relación entre segmentos  $\frac{AB}{A_1B} = \frac{AD}{A_2D}$ ; Ahora bien, teníamos que

$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$ , por la semejanza entre  $\triangle ABC$  y  $\triangle ADE$ . Como  $A_1B = \frac{1}{2} \cdot BC \rightarrow A_2D = \frac{1}{2} \cdot DE$ .

Y así queda probado que  $A_2$  es el punto medio de DE.



De este modo, en efecto, se verifica que la simediana por A es el lugar geométrico de los puntos medios de las antiparalelas a BC con respecto a los lados AB y AC del triángulo ABC.

Basándonos en este hecho, si trazamos las tangentes por los vértices B y C al circuncírculo del triángulo ABC, ambas rectas se cortarán en  $T_a$ , punto que se encuentra en la mediatriz de BC. La circunferencia de centro, el punto  $T_a$  y de radio  $T_aB = T_aC$ , determinarán sobre la prolongación de los lados AB y AC dos puntos  $B_1$  y  $C_1$ .

Nos quedará probar que  $B_1, T_a$  y  $C_1$  están alineados.

Observamos para ello, que la suma  $\angle CT_aB_1 + \angle BT_aC_1 + \angle CT_aB = \pi$ .

En efecto,  $\angle CT_aB_1 = \pi - 2\angle B$ ;  $\angle BT_aC_1 = \pi - 2\angle C$ ;  $\angle CT_aB = \pi - \angle COB = \pi - 2\angle A$ .

Por tanto,  $T_a$  es el punto medio del segmento de extremos  $B_1$  y  $C_1$ .

Como quiera que  $B_1C_1$  es una antiparalela al lado BC, resulta así que  $AT_a$  será la simediana  $s_a$ .