

Problema 905

Teorema 8.4 Sea T_A el punto de intersección de las tangentes en B y C al circuncírculo de ABC.

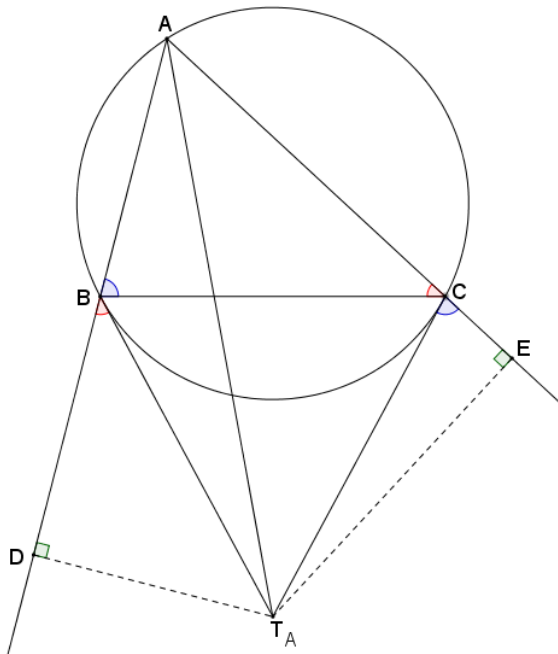
Entonces AT_A es una simediana del triángulo ABC.

Leversha, G. (2013) : The geometry of the triangle. (Pathways, Number Two), p. 101

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Lemme (supposé connu): dans un triangle quelconque les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

Soient D et E les projections de T_A sur les droites [AB] et [AC]. On va démontrer que **les distances T_AD et T_AE de T_A aux côtés AB et AC sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés**



Comme les droites T_AB et T_AC sont tangentes en B et C au cercle circonscrit au triangle ABC, on a les relations d'angles $\angle T_ABC = \angle T_ACB = \angle BAC$.

D'où $\angle DBT_A = 180^\circ - \angle ABC - \angle T_ABC = \angle ACB$

et $\angle ECT_A = 180^\circ - \angle ACB - \angle T_ACB = \angle ABC$.

Comme le triangle T_ABC est isocèle de sommet T_A , il en résulte que :

$T_AD/T_AE = T_AB \sin(\angle DBT_A) / T_AC \sin(\angle ECT_A)$, soit

$T_AD/T_AE = \sin(\angle ACB) / \sin(\angle ABC)$.

D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on sait que:

$\sin(\angle ACB) / \sin(\angle ABC) = AB/AC$.

D'où $T_AD/T_AE = AB/AC$. C.q.f.d.

Il existe bien d'autres démonstrations de ce théorème. Trois d'entre elles sont disponibles dans l'article de Yufei Zhao (pages 5 et 6) à l'adresse: http://yufeizhao.com/olympiad/three_geometry_lemmas.pdf