Problema 906.-

Se considera un triángulo cuyos lados son los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en circunferencias de radio unidad. Demostrar que dicho triángulo es rectángulo.

Manzano, J. M. (2019): Olimpiadas de Matemáticas. Página de preparación y problemas.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sean construidos el decágono y el pentágono de lados $l_{10}\ y\ l_5$, sobre la circunferencia de centro O y Radio $R = 1$. Sea P el punto donde la altura h_O del triángulo OBJ corta al lado AB. Este punto P será el ortocentro de dicho triángulo. Por tanto, los triángulos isósceles $\Delta BPJ\ y\ \Delta BJA$, serán semejantes. Obtenemos así la relación:

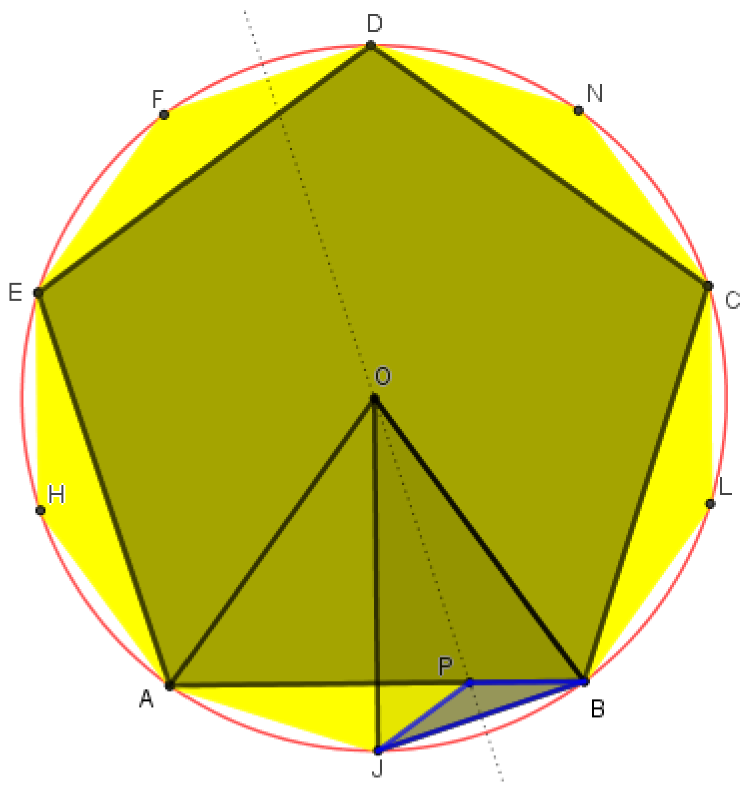
$$\rightarrow \frac{BP}{BJ} = \frac{BJ}{BA} \rightarrow \frac{PB}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{l_5} \rightarrow l_{10}^2 = PB \cdot l_5 \quad (I)$$

Sea ahora el turno de la semejanza entre los triángulos isósceles $\Delta APO\ y\ \Delta AOB$. Establecemos así la relación:

$$\rightarrow \frac{AP}{OA} = \frac{OA}{AB} \rightarrow \frac{AP}{R} = \frac{R}{l_5} \rightarrow R^2 = AP \cdot l_5 \quad (II)$$

Por fin, sumando ambas relaciones $(I)\ y\ (II)$, deducimos que:

$$l_{10}^2 + R^2 = PB \cdot l_5 + AP \cdot l_5 \rightarrow l_{10}^2 + R^2 = (AP + PB) \cdot l_5 = l_5^2.$$



En definitiva, $l_{10}^2 + R^2 = l_5^2$, y como quiera que $R = l_6$, significa que los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en una circunferencia de radio R=unidad, forman un triángulo rectángulo.