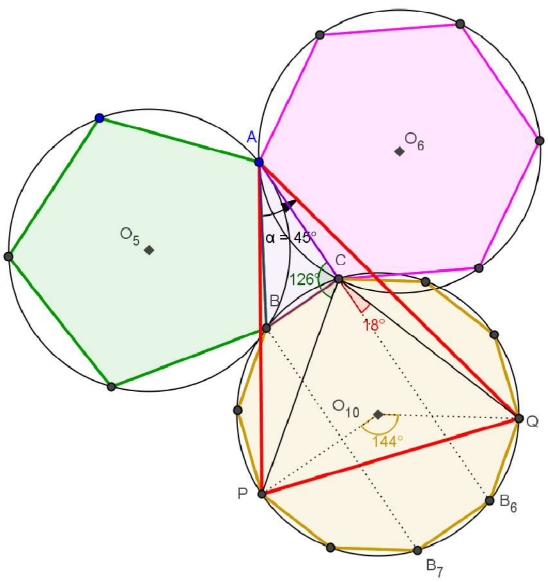
Quincena del 1 al 15 de Abril de 2019

***Problema* 906.-**

Problema 418.- *Se considera un triángulo cuyos lados son los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en circunferencias de radio unidad. Demostrar que dicho triángulo es rectángulo.*

Manzano, J. M. (2019):Olimpìadas de Matemáticas. Página de preparación y problemas.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Para el polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio R, consideramos el triángulo formado por un punto arbitrario X de la misma (que no sea ningún vértice del polígono) y dos vértices consecutivos del mismo. El ángulo en X, por el teorema del ángulo inscrito, mide $\frac{180°}{n}$ y por tanto su lado, según el teorema de los senos, es $l_n = 2R \cdot \operatorname{sen}\frac{180°}{n}$.

El problema se concluye demostrando pues, que se verifica la relación:

$$4 \cdot \operatorname{sen}^2 36° = 1 + 4 \cdot \operatorname{sen}^2 18° \quad (1)$$

Tomando los cosenos, esa relación es equivalente a

$$\boxed{4 \cdot \cos^2 18 = 1 + 4 \cdot \cos^2 36 \qquad (2)}$$

A partir de $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \operatorname{sen} 18°$ se pueden obtener $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \operatorname{sen} 54°$ y $\cos^2 18 = 1 - \cos^2 72$. Con estos datos se verifica de inmediato la relación (2) y por tanto el triángulo ABC formado por los lados de esos tres polígonos regulares es rectángulo en C.

Pero **veamos cómo calcular $\cos 72°$.**

Ese número es la parte real de una de las raíces complejas de la ecuación

$$z^5 - 1 = 0.$$

De las raíces quintas de la unidad sólo hay una real, separada ésta ($z = 1$) nos queda la ecuación ciclotómica de grado 4,

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad (i).$$

Esta es una ecuación recíproca (con cada solución tiene también su inversa) por ello se puede reducir su grado a la mitad dividiéndola por z^2 y haciendo el cambio

$$y = z + z^{-1} \quad (ii).$$

Se tendrán $(z^2 + z^2) + (z + z^{-1}) + 1 = 0$ y después de efectuar el cambio de variable, $(y^2 - 2) + y + 1 = 0$, o bien,

$$y^2 + y - 1 = 0 \quad (iii).$$

Las soluciones de esta última ecuación son $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Cada uno de estos valores llevados a (ii), nos permiten obtener dos soluciones de la ecuación (i) de la siguiente manera:

Tomo $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$ buscando la solución de (i) que tenga parte real positiva ($\cos 72°$) .

Multiplicando por z la ecuación (ii) y agrupando términos tenemos

$$z^2 - yz + 1 = 0 \quad (ii')$$

Resolviendo ésta en z resulta $z = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$, donde $y^2 - 4 = -3 - y < 0$, por tanto la parte real de esta expresión $\frac{y}{2}$ es igual a $\cos 72°$.

Tendremos pues $\cos 72° = \frac{y}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, tal como esperábamos.

■