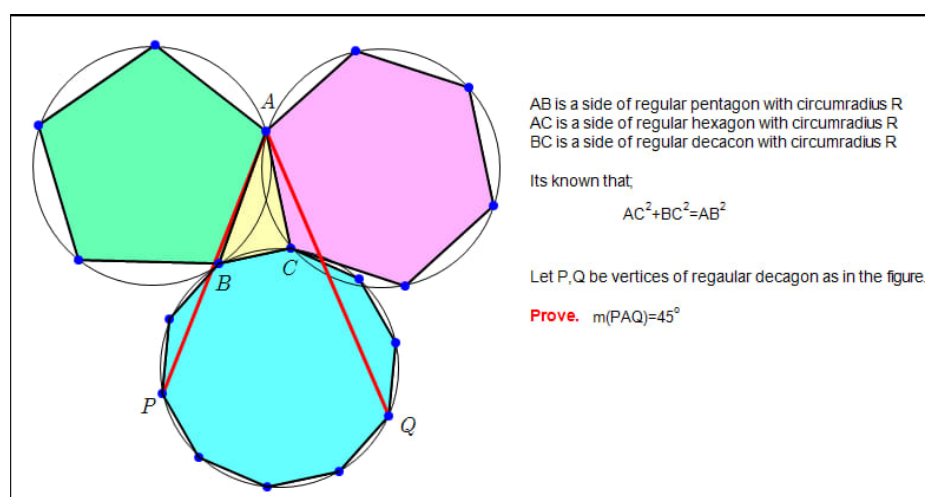


Pr. Cabri 907

Enunciado

Sean un pentágono regular A, B, A_3, A_4, A_5 , un decágono regular $B, C, B_3, B_4, Q, B_6, B_7, B_8, P, B_{10}$, y un hexágono regular A, C_2, C_3, C_4, C_5, C , de tal modo que las circunferencias que los contienen tengan el mismo radio, y que los vértices estén en el sentido del reloj. Es conocido que $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Demostrar que $\angle PAQ = 45^\circ$

Altıntaş, A. (2019) Perú Geométrico. Geometria para todos (Grupo de Facebook administrado por Miguel Ochoa).



Solución

por César Beade Franco

Suponemos que el decágono tiene como centro el punto $(0,0)$ y vértices $B(1,0)$ y $C(\cos \frac{7\pi}{10}, \sin \frac{7\pi}{10})$.

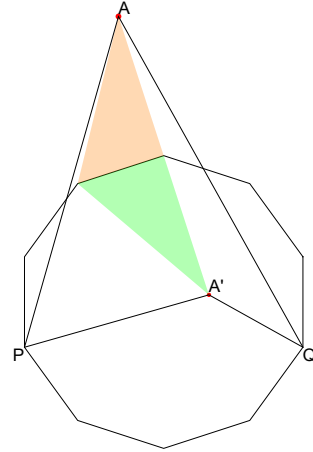
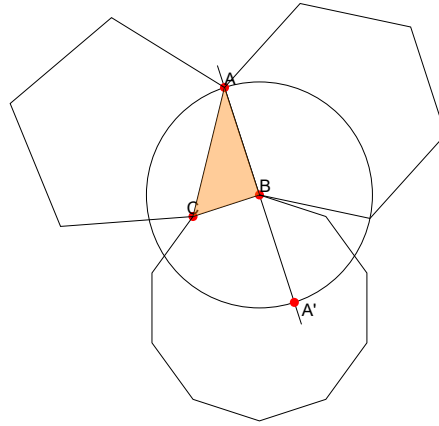
Para calcular A intersecamos la circunferencia con centro C y radio $r_6 = 1$, con la recta perpendicular a BC por B.

Es decir, resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $y = \frac{\cos \frac{7\pi}{10} \cdot x}{1 - \sin \frac{7\pi}{10}} + 1$.

Obtenemos los puntos $A = (-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (3 - \sqrt{5})}, \frac{-3 + \sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}})$ y

$A' = (\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} (3 - \sqrt{5})}, \frac{-3 + \sqrt{5} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}})$ (1).

Out[308]=



El coseno de PAQ viene dado por $\frac{AP \cdot AQ}{|AP| |AQ|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) por lo que el ángulo mide 45° .

También podemos calcular PA'Q. En este caso $\frac{A'P \cdot A'Q}{|A'P| |A'Q|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, donde resulta un ángulo de 135° .

Notas

(1) A partir de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ es fácil obtener $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})}$ y de sus múltiplos.

(2) He aquí su cálculo. $\frac{AP \cdot AQ}{|AP| |AQ|} =$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right), \frac{1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right), \frac{1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}} \right) / \\ & \left| \left(\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} - \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right), \frac{1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}} \right) \right| \left| \left(\frac{1}{4} \left(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{2(5 + \sqrt{5})} \right), \frac{1 + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{-3 + \sqrt{5}} \right) \right| \\ & = \frac{\frac{1}{4} (5 + \sqrt{5} + \sqrt{50 + 22\sqrt{5}})}{\sqrt{10 + 4\sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{2}(65 + 29\sqrt{5})}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$