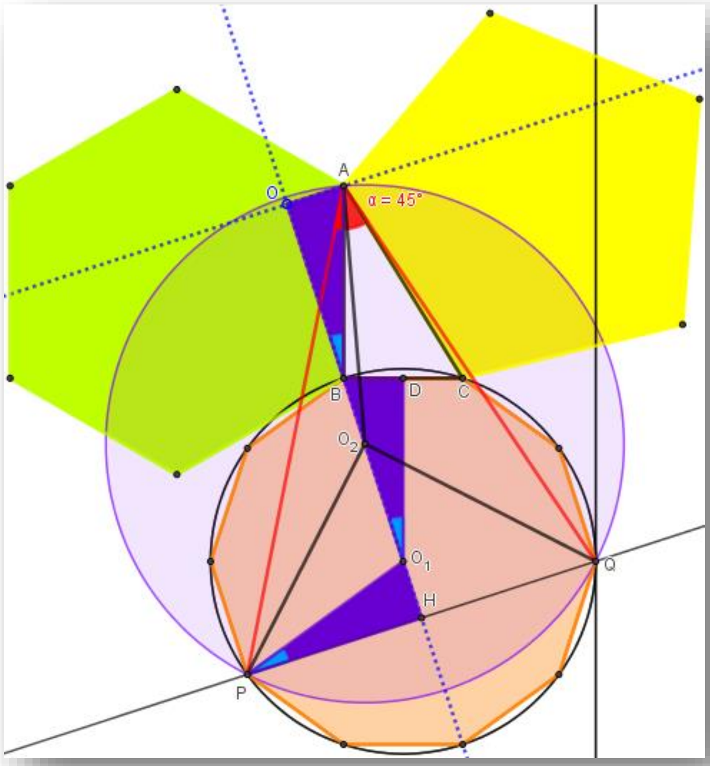
Problema 907.-
Se considera un triángulo ABC cuyos lados son los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en circunferencias de igual radio R. Sean P y Q, vértices del decágono regular como se muestra en la figura. Demostrar que $\measuredangle PAQ = 45°$.

Altıntaş, A. (2019) Perú Geométrico. Geometría para todos.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sea construido el triángulo rectángulo ABC, de catetos $l_{10}\ y\ l_6$, y de hipotenusa l_5. Sobre la recta que pasa por el vértice B y el centro O_1 del decágono regular, proyectamos ortogonalmente los puntos P y A, determinando los puntos H y O, respectivamente. Sea además D, el punto medio del lado BC.



Por ser ABC triángulo rectángulo, se verifica que el triángulo AOB es congruente con los triángulos $BDO_1\ y\ O_1HP$.

Si consideramos el sistema de referencia determinado por el punto O como origen de referencia y de ejes OA (=abscisas) y OB (=ordenadas), podemos establecer las coordenadas de los puntos notables $A, P\ y\ Q$. Sus coordenadas serán, respectivamente:

$A = (R\ sin18°, 0)$;
$P = (-Rcos18°, -Rsin18° - R - Rcos18°)$;
$Q = (Rcos18°, -Rsin18° - R - Rcos18°)$.

Como H es el punto medio del segmento PQ, sus coordenadas serán,
$H = (0, -Rsin18° - R - Rcos18°)$.

Sea además O_2, el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo APQ.
Si queremos probar que $\measuredangle PAQ = 45°$, este hecho será equivalente a probar que el triángulo PO_2Q es rectángulo e isósceles.
Deberá ocurrir por tanto, que:
$d(A, O_2) = d(P, O_2) = d(Q, O_2) = \sqrt{2}\, d(H, O_2)$.

Comprobemos que, en efecto, se verifican estas relaciones. El punto O_2 se encuentra en la mediatriz del segmento PQ y tendrá de coordenadas $O_2 = (0, -Rsin18° - R)$ y, por tanto, se verifica: $d(P, O_2) = d(Q, O_2) = \sqrt{2}\, d(H, O_2)$.

Únicamente bastará probar que $d(A, O_2) = \sqrt{2}\, d(H, O_2)$. Veamos esto con mayor detalle:

En primer lugar, $A = (R\ sin18°, 0)\ \ y\ \ O_2 = (0, -R\ sin18° - R) \rightarrow\ d^2(A, O_2) = (R\ sin18°)^2 + (R\ sin18° + R)^2$.

Por otra parte, $H = (0, -Rsin18° - R - Rcos18°)\ \ y\ \ O_2 = (0, -Rsin18° - R) \rightarrow 2d^2(H, O_2) = 2(Rcos18°)^2$.

Ahora bien, $(R\ sin18°)^2 + (R\ sin18° + R)^2 = 2(Rcos18°)^2 \rightarrow 2\sin^2 18° + 2\,sin\,18° + 1 = 2\cos^2 18°$

$$2\sin^2 18° + 2\,sin\,18° + 1 = 2 - 2\sin^2 18° \rightarrow 4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0.$$

En efecto, esta igualdad es cierta y se verifica, ya que:

$$\sin 18° = \frac{-2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$