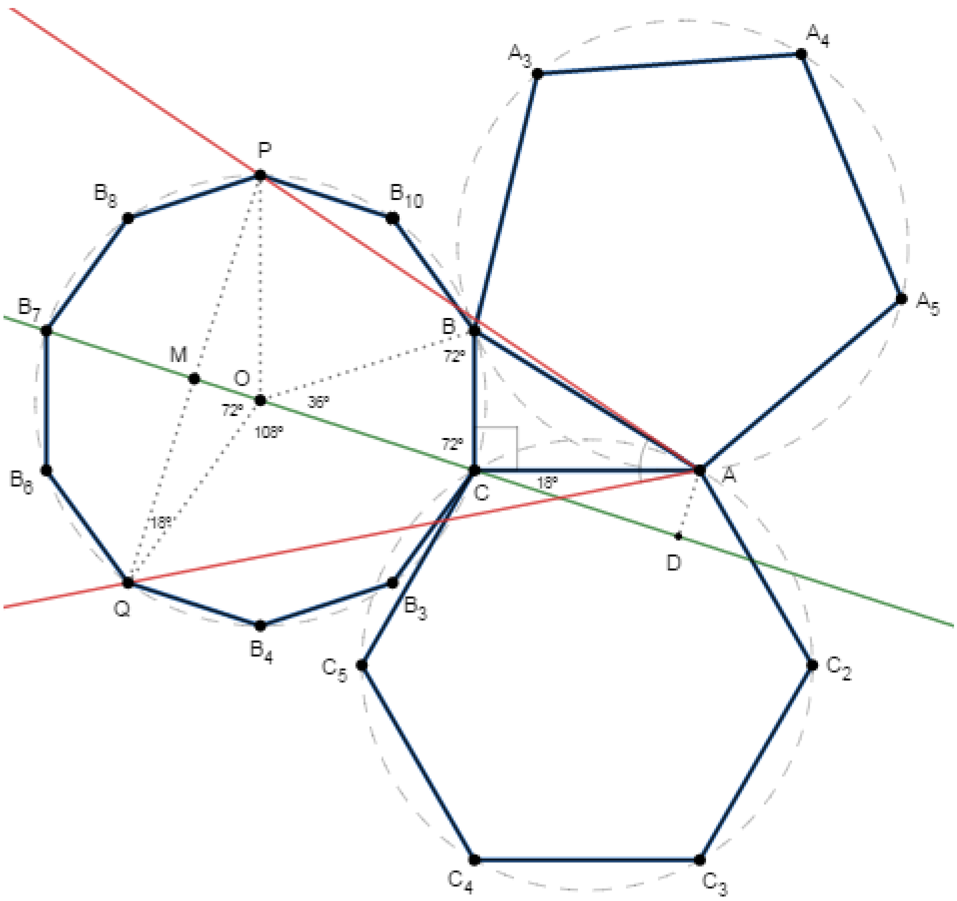
Problema 907. (Altintas, A. (2019), Perú Geométrico, Geometría para todos, Grupo de Facebook administrado por Miguel Ochoa) Sean un pentágono regular $ABA_3A_4A_5$, un decágono regular $BCB_3B_4QB_6B_7B_8PB_{10}$ y un hexágono regular $AC_2C_3C_4C_5C$ de tal modo que las circunferencias que los contienen tienen el mismo radio y que los vértices están ordenados en sentido horario. Teniendo en cuenta que es conocido que:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

demostrar que $\measuredangle PAQ = \frac{\pi}{4}$.

Solución:



Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que las circunferencias circunscritas a los tres polígonos dados tienen radio unidad. Además, como:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

entonces, el triángulo ABC es rectángulo en C, por lo que tenemos los ángulos que se muestran en la figura, siendo:

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = AD = MO \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right) = CD = PM = QM \end{cases}$$

y, si consideramos el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto O y eje de abscisas en la recta OC, resulta que:

$$\begin{cases} A=\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right),\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\\ P=\left(-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right),\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\\ Q=\left(-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right),-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PA}=\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right),\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\\ \overrightarrow{QA}=\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right),\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)\end{cases}$$

luego:

$$\cos(\triangle PAQ)=\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{QA}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{QA}\right|}$$

$$=\frac{\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sqrt{\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2}\sqrt{\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]^2}}$$

Finalmente, como:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

entonces:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

por lo que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

y, sustituyendo en la expresión deducida anteriormente, resulta que:

$$\cos(\triangle PAQ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y, por tanto, $\triangle PAQ=\frac{\pi}{4}$.