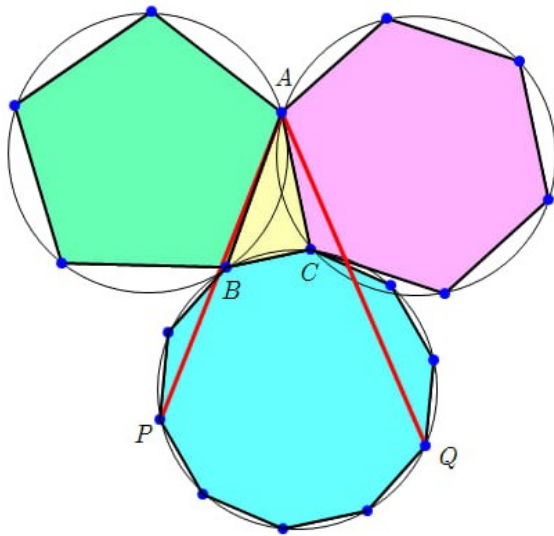


Problema n°907

Altıntaş, A. (2019) Perú Geométrico. Geometria para todos (Grupo de Facebook administrado por Miguel Ochoa.)



AB is a side of regular pentagon with circumradius R
AC is a side of regular hexagon with circumradius R
BC is a side of regular decacon with circumradius R

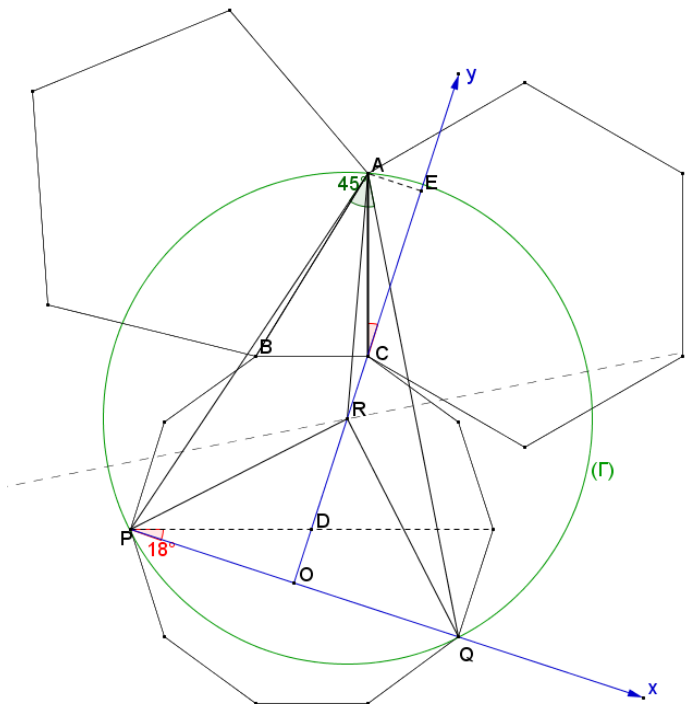
Its known that,

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Let P, Q be vertices of regular decagon as in the figure

Prove. $m(\angle PAQ) = 45^\circ$

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On prend la droite [PQ] pour axe des abscisses Ox, le milieu du segment PQ pour origine O et la droite [OC] pour axe des ordonnées Oy. Celle-ci passe par le centre D du décagone.

On trace le point E projection de A sur Oy, puis le point R sur l'axe Oy tel que $OR = OP = OQ$

Le triangle RPQ est donc rectangle isocèle avec $\angle PRQ = 90^\circ$

On a les relations d'angles : $\angle OPD = 18^\circ$ et $\angle ACE = 18^\circ$.

Par hypothèse $AC = DC = DP = 1$.

D'où $AE = \sin(18^\circ)$, $OR = \cos(18^\circ)$,

$OE = OD + DC + CE = \sin(18^\circ) + 1 + \cos(18^\circ)$,

$RE = OE - OR = \sin(18^\circ) + 1$

On en déduit

$RQ^2 = 2\cos^2(18^\circ)$

$RA^2 = AE^2 + RE^2 = \sin^2(18^\circ) + (\sin(18^\circ) + 1)^2$

soit $RA^2 = 2\sin^2(18^\circ) + 2\sin(18^\circ) + 1$

Or $\sin(18^\circ) = (\sqrt{5} - 1)/4$ et $\cos(18^\circ) = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$

D'où $RQ^2 = (5 + \sqrt{5})/4$ et $RA^2 = (\sqrt{5} - 1)^2/8 + (\sqrt{5} - 1)/2 + 1$

soit $RA^2 = (5 + \sqrt{5})/4$.

Il en résulte que $RA = RP = RQ$. Le point R est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle APQ.

Comme $\angle PRQ = 90^\circ$, on en déduit $\angle PAQ = 45^\circ$