Quincena del 16 al 30 de Abril de 2019

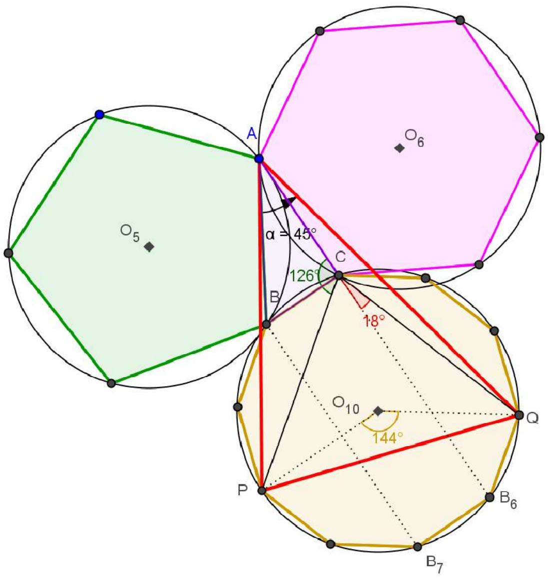
***Problema* 907.-** *Sean un pentágono regular A, B, A_3, A_4 ,A_5 ,un decágono regular B, C, B_3, B_4, Q, B_6, B_7, B_8, P, B_{10}, y un hexágono regular A, C_2, C_3, C_4 ,C_5, C, de tal modo que las circunferencias que los contienen tengan el mismo radio, y que los vértices estén en el sentido del reloj.*

Es conocido que $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Demostrar que $\sphericalangle PAQ = 45º$

Altıntaş, A. (2019) Perú Geométrico. Geometria para todos (Grupo de Facebook administrado por Miguel Ochoa.)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Si el ángulo en A del triángulo APQ tiene una amplitud de 45°, el teorema del coseno aplicado a ese triángulo nos da

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - \sqrt{2}AP \cdot AQ$$

Por otra parte el área de ese triángulo vendría dada por la expresión

$$[APQ] = \frac{\sqrt{2}}{4}AP \cdot AQ$$

Combinando ambas tendremos

$$\boxed{\boldsymbol{PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 4[APQ]} \qquad (*)}$$

Recíprocamente es inmediato que si se verifica esta relación el ángulo en A es de 45°.

Así pues la resolución del problema está en demostrar que la relación anterior se verifica en las circunstancias del enunciado.

Con la ayuda del punto C, interior a este triángulo, vamos calcular el área mediante la suma de las áreas de los tres triángulos que se forman desde C.

Por propiedades relativas a los polígonos regulares y a los ángulos inscritos en una circunferencia podemos afirmar que B_6C y BC son perpendiculares y por tanto los puntos A, C y B_6 están alineados.

También tenemos $CP = CQ = 2R{\cdot}\text{sen } 54, CA = R$ y $PQ = 2R \cdot \text{sen } 72°$.

Para los ángulos que concurren en C tenemos: $\sphericalangle B_6CQ = 18°$ y por tanto $\sphericalangle ACQ = 162°$; $\sphericalangle PCB_6 = 54°$ y con ello $\sphericalangle ACP = 126°$.

Con estos datos para las áreas de los triángulos respectivos se tienen:

$$[ACQ] = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CQ \cdot \text{sen } 162° = R^2 \cdot \text{sen } 54 \cdot \text{sen } 18° = \frac{R^2}{4}$$

$$[ACP] = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CP \cdot \text{sen } 126° = R^2 \cdot \text{sen}^2 \, 54$$

$$[CPQ] = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot CQ \cdot \text{sen } 72° = 2R^2 \cdot \text{sen}^2 \, 54 \cdot \text{sen } 72°$$

Sumándolas obtenemos el área de APQ

$$4[APQ] = R^2(1 + 4 \, \text{sen}^2 \, 54 + 8 \cdot \text{sen}^2 \, 54 \cdot \text{sen } 72°).$$

En el problema 906 obtuvimos

$$4 \cdot \cos^2 18 = 1 + 4 \cdot \cos^2 36$$

Si cambiamos los cosenos por los senos de los complementarios tenemos ahora:

$$4 \cdot \text{sen}^2 72° = 1 + 4 \cdot \text{sen}^2 54°$$

y por tanto

$$4[APQ] = 4R^2(\text{sen}^2 72° + 2 \cdot \text{sen}^2 \, 54 \cdot \text{sen } 72°).$$

Ahora calculamos AP y AQ en los triángulos ACP y ACQ respectivamente.

$$\begin{aligned} AP^2 &= AC^2 + CP^2 + 2AC \cdot CP \cdot \cos 54° = R^2(1 + 4 \cdot \text{sen}^2 \, 54 + 4 \cdot \text{sen } 54 \cdot \cos 54°) \\ &= 4R^2(\text{sen}^2 72° + \text{sen } 54 \cdot \cos 54°) \end{aligned}$$

Para AQ cambiando el ángulo de 54° por el de 18° en el último término

$$AQ^2 = AC^2 + CP^2 + 2AC \cdot CP \cdot \cos 18° = 4R^2(\text{sen}^2 72° + \text{sen } 54 \cdot \cos 18)$$

$$\begin{aligned} AP^2 + AQ^2 &= 4R^2\big(2 \cdot \text{sen}^2 72° + \text{sen } 54 \cdot (\cos 54° + \cos 18)\big) \\ &= 4R^2(2 \cdot \text{sen}^2 72° + 2 \cdot \text{sen}^2 \, 54 \cdot \text{sen } 72) \end{aligned}$$

Restamos ahora $4[APQ]$ se tiene

$$AP^2 + AQ^2 - 4[APQ] = 4R^2 \text{sen}^2 72° = PQ^2$$

y queda probada la igualdad $(*)$.■