

Pr. Cabri 908

Enunciado

Construir un triángulo ABC en el que la recta Incentro, I , Circuncentro, O, sea paralela a BC.

A) ¿Para qué ángulos de A no es posible la construcción?

B) ¿Qué ángulo debe tener A para que $d(I,O) = (1/3)(d(B,C))$?

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solución

por César Beade Franco

Apartado A

Consideremos un triángulo (1) de vértices $A(eh, \sqrt{(1+e^2)(1-h^2)})$, $B(-1,0)$ y $C(1,0)$.

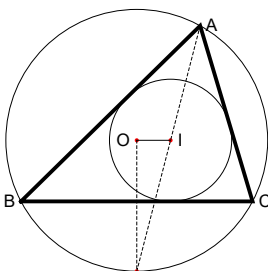
Para este triángulo $O = (0, \frac{-2+e^2+h^2}{2\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}})$ e $I = (h, \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e})$, donde las ordenadas indican la distancia de estos puntos al lado BC y han de coincidir si OI es paralela a BC.

Resolvemos para h, $\frac{-2+e^2+h^2}{2\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}} = \frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$, obteniendo $h = \frac{\sqrt{(2-e)e}}{\sqrt{-1+2e}}$, lo que nos

indica que $e \leq 2$. Y sabemos que $e \geq 1$. Veremos como eso afecta al valor del ángulo A.

El vértice A queda ahora como $A = (\frac{\sqrt{e(2-e)}e}{\sqrt{-1+2e}}, \frac{-1+e^2}{\sqrt{-1+2e}})$ (2). Así que

$\cos A = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{-1+e}{e}$ (3). Sus valores oscilan entre 0 y $\frac{1}{2}$, lo que indica que A varía de 60° (equilátero y segmento reducido a un punto) a 90° (rectángulo “degenerado” en B o C y segmento sobre el lado BC de longitud la mitad de BC).



Out[255]=

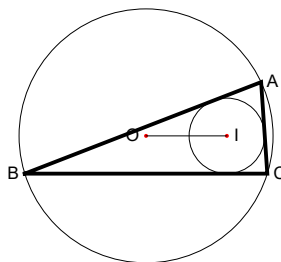
Apartado B

El lado BC mide 2 y $d(I,O) = |IO| = \sqrt{((2-e)e)/(-1+2e)}$. Resolviendo la ecuación

$d(I,O) = \frac{2}{3}$, obtenemos $e = \frac{1}{9} (5 + \sqrt{61})$. Por tanto $\cos A = \frac{-1 + \frac{1}{9} (5 + \sqrt{61})}{\frac{1}{9} (5 + \sqrt{61})} = \frac{1}{4} (9 - \sqrt{61}) \Rightarrow$

$A = \arccos(\frac{1}{4} (9 - \sqrt{61})) \approx 72.6962^\circ$

Out[437]=

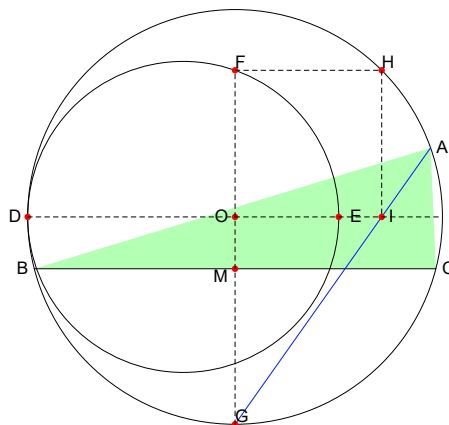


Construcción

A partir del lado BC y el circuncentro O es posible dar una construcción euclídea del vértice A.

Para empezar, O está situado sobre la mediatriz de BC a una distancia de este lado que no supere $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ la longitud de BC.

Out[429]=



Conocemos $R=OB$ y $r=OM$, distancia de O al lado BC. Calcularemos $d=OI$ usando la conocida relación $d^2=R^2-2Rr$, es decir construiremos un segmento de longitud $\sqrt{2Rr}$. Trazamos un diámetro al circuncírculo paralelo a BC y sobre él un punto E tal que $OE=2r$. Como $OD=R$, la media proporcional de OD y OE medirá $\sqrt{2Rr}$. Para obtenerla trazamos una circunferencia de diámetro DE. La recta OG perpendicular a OD por O la corta en F tal que $OF=\sqrt{2Rr}$.

Una paralela a BC por F corta al circuncírculo en H. El teorema de Pitágoras aplicado al triángulo OFH nos asegura que $FH=d$.

El incentro es la proyección de H sobre el diámetro OD. La recta IG corta al circuncírculo en el vértice A del triángulo.

Notas

- (1) Un EH-triángulo. Ver, por ejemplo los problemas 689 u 897 de esta página donde se explica el significado de e y h.
- (2) Ecuación paramétrica de la curva que describe A.
- (3) Calculado con “Mathematica”.