Problema 908.-
Construir un triángulo ABC en el que la recta que une el Incentro I y Circuncentro O, sea paralela a BC.
A) ¿Para qué ángulos de A no es posible la construcción?
B) ¿Qué ángulo debe tener A para que $d(I,O) = \frac{1}{3} \cdot d(B,C)$?

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

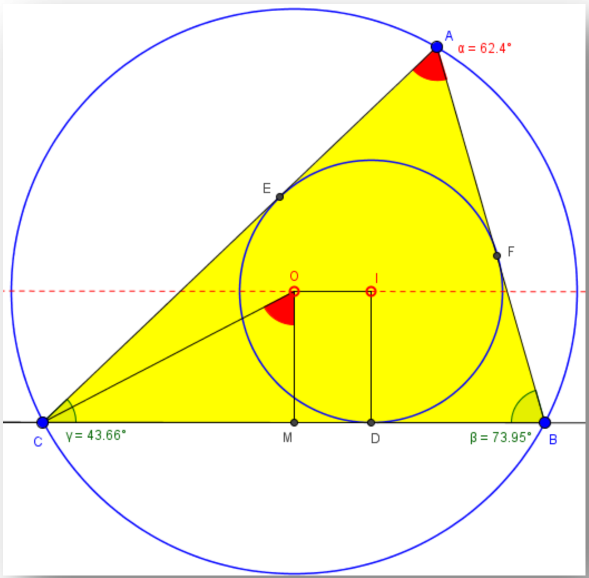
a) Usando las notaciones habituales, sean r y R los valores de los radios de las Circunferencias Inscrita y Circunscrita, respectivamente.
Para este apartado, nos basaremos en la propiedad conocida para todo triángulo ABC.
$$cosA + cosB + cosC = 1 + \frac{r}{R}.$$
Podemos asegurar que el ángulo A no puede ser obtuso ya que entonces el Circuncentro O sería exterior al triángulo ABC, por lo que la recta OI no podría ser paralela al lado AB.
Vamos a ver que es necesario y suficiente que se verifique la relación $cosB + cosC = 1$.

Proposición.-
La recta OI que une el Incentro I y Circuncentro O, será paralela al lado BC, $OI \parallel BC \Leftrightarrow cosB + cosC = 1$.

($\Longrightarrow$)En primer lugar, si $OI \parallel BC \Rightarrow RcosA = r$.

Entonces la expresión, $cosA + cosB + cosC = 1 + \frac{r}{R}$, queda reducida a $cosB + cosC = 1$.

($\Longleftarrow$)Sea ahora que $cosB + cosC = 1$. Entonces ni B ni C pueden ser ángulos obtusos.
Por tanto, el triángulo ABC es acutángulo.
Al ser el triángulo ABC acutángulo, se verifica el Teorema de Carnot del siguiente modo:
$$d(O;BC) + d(O;CA) + d(O;AB) = R + r \rightarrow RcosA + RcosB + RcosC = R + r$$



Como por hipótesis, $RcosB + RcosC = R$
$\rightarrow RcosA = r \rightarrow OI \parallel BC$.

Escolio.-
Y la pregunta que nos hacemos ahora es para qué ángulos de A no es posible la construcción.
La respuesta viene de la siguiente consideración:
$B + C = \pi - A$;

Por la proposición anterior, la construcción será posible *sii* $cosB + cosC = 1$.
$\cos(B + C) = -cosA = cosBcosC - senBsenC$

Por tanto,

$CosA > 0, cosA = \sqrt{(1-\cos^2 B)(1-(1-cosB)^2)} - (1-cosB)cosB$.
Si llamamos $0 < cosB = x < 1 \rightarrow cosA = \sqrt{(x+1)x(x-1)(x-2)} + x(x-1)$
La expresión $f(x) = \sqrt{(x+1)x(x-1)(x-2)} + x(x-1)$ es simétrica respecto de $x = \frac{1}{2}$.
Además, si hacemos el cambio $x = t + \frac{1}{2}$, observamos con mayor claridad que en $x = \frac{1}{2}$, $f(x)$ alcanza el valor Máximo Absoluto $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

En efecto, $g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(-1 + 4t^2 + \sqrt{9 - 40t^2 + 16t^4}\right)$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(8t + \frac{-80t + 64t^3}{2\sqrt{9-40t^2+16t^4}}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{t} = 0.$ Ya que:

$1 + \frac{-5+4t^2}{\sqrt{9-40t^2+16t^4}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - 40t^2 + 16t^4} = 5 - 4\mathrm{t}^2$

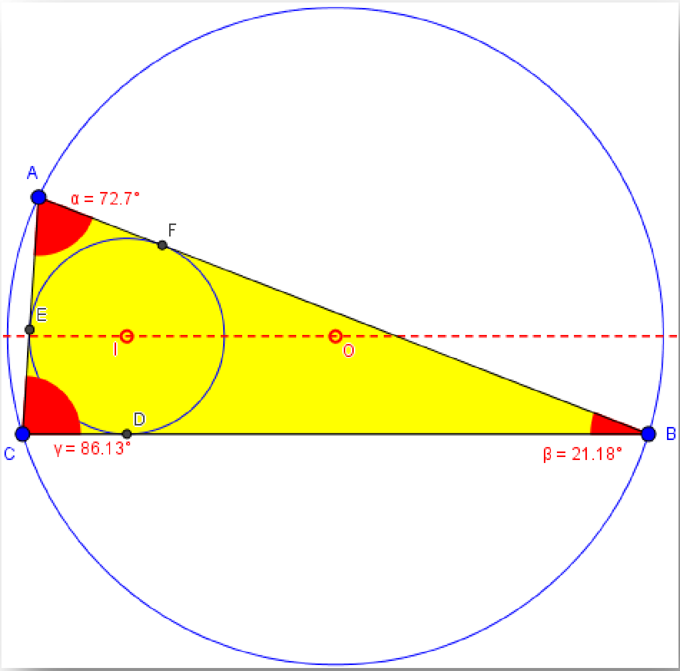
$\Leftrightarrow 9 - 40t^2 + 16t^4 = 25 - 40\mathrm{t}^2 + 16\mathrm{t}^4 \Leftrightarrow 9 = 25$ (Absurdo)

En definitiva, para $cosB = x = \frac{1}{2} \to B = \frac{\pi}{3} \to A = \frac{\pi}{3} \to C = \frac{\pi}{3} \to El\ triángulo\ ABC\ es\ equilátero.$

Para cualquier otro valor de $0 < cosB = x < 1$, tenemos que $f(x) = cosA < \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$.

Por tanto, los ángulos de A para los que sólo es posible esta construcción son $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}}$.

b) $\mathrm{Cos}[B] + \mathrm{Cos}[C] = 1 \to \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1 \to \frac{(a^2-(b-c)^2)(b+c)}{2abc} = 1$



Como quiera que:

$$d(I,O) = \frac{1}{3} \cdot d(B,C) \to$$

$$(s-c) + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}a = a,$$

$$siendo\ s = semiperímetro.$$

Por tanto, $a = \frac{3}{2}(c-b)$.

En definitiva, tenemos las dos relaciones:

$$\frac{(a^2-(b-c)^2)(b+c)}{2abc} = 1;$$

$$a = \frac{3}{2}(c-b)$$

Sustituyendo el valor de a en la primera expresión, obtenemos que:

$$5b^2 + 12bc - 5c^2 = 0.$$

Por tanto, resolviendo esta ecuación, determinamos el valor del lado c en función del lado b.

$$c = \frac{1}{5}(6b + \sqrt{61}b)$$

El triángulo que cumple las dos condiciones exigidas en este apartado será el de lados:

$$\{a, b, c\} = \left\{\frac{3}{2}(c-b), b, \frac{1}{5}(6b + \sqrt{61}b)\right\} = \left\{\frac{3}{10}(1 + \sqrt{61})b, b, \frac{1}{5}(6b + \sqrt{61}b)\right\}.$$

Por ejemplo, si $b = 1 \to$

$\{a, b, c\} = \left\{\frac{3}{10}(1 + \sqrt{61}), 1, \frac{1}{5}(6 + \sqrt{61})\right\} = \{2.643074902771996{,}1{,}2.762049935181331\}.$

El ángulo $\boldsymbol{A \cong 72.7°}$