

### Problema 908

Construir un triángulo ABC en el que la recta Incentro, I , Circuncentro, O, sea paralela a BC.

A) ¿Para qué ángulos de A no es posible la construcción?

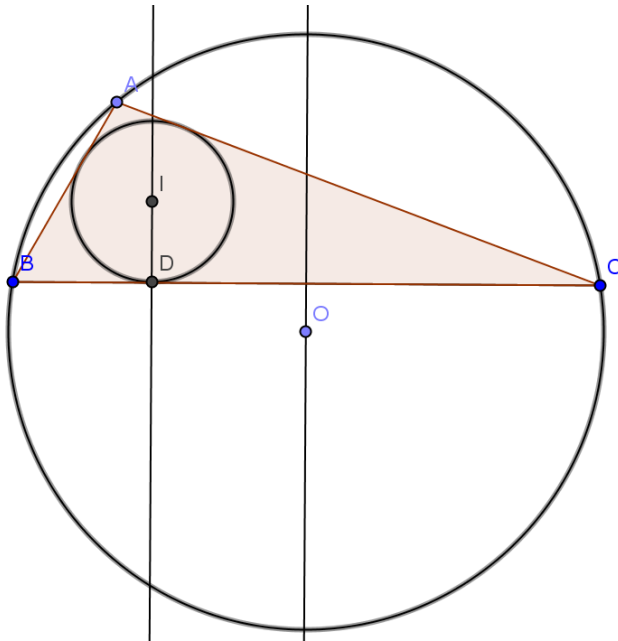
B) ¿Qué ángulo debe tener A para que  $d(I,O) = (1/3)(d(B,C))$

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solución del director

A) El incentro de ABC siempre estará en el interior del triángulo.

Si el ángulo A es mayor de  $90^\circ$ , el circuncentro de ABC estará en el semiplano opuesto de A respecto a BC, por lo que no podrá ser OI paralelo a BC.



Así que tomemos un ángulo A menor que  $90^\circ$ .

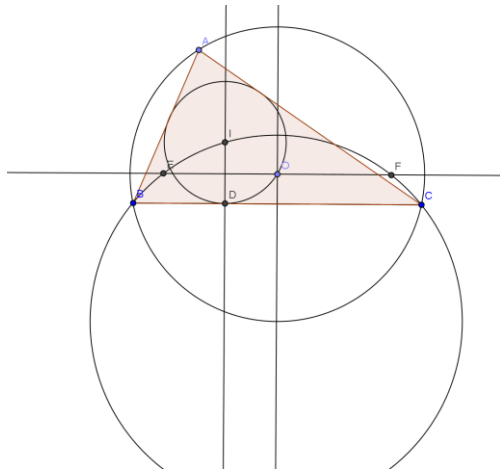
Sea O el circuncentro de ABC. Es  $\angle BOC = 2\alpha$

El arco capaz de los posibles incentros I al variar A con  $\alpha$  constante en la circunferencia circunscrita ABC constante es  $\angle BIC = 90^\circ + \alpha/2$

Si trazamos por O una recta s paralela a BC, en caso de ser  $90^\circ + \alpha/2 < 2\alpha$ , el arco capaz no cortará a s y por tanto no será posible la construcción.

Si  $90^\circ + \alpha/2 = 2\alpha$ , es decir, si  $\alpha = 60^\circ$ , el arco capaz será tangente a s y habrá una solución.

Si  $90^\circ + \alpha/2 > 2\alpha$ , es decir, si  $\alpha > 60^\circ$  el arco capaz será secante a  $s$  y habrá dos soluciones de la construcción pedida.



Una vez que tengamos los dos incentros,  $I_1$  e  $I_2$  las simétricas de  $BC$  respecto a  $BI_1$  y a  $BI_2$  al cortar a la circunscrita nos darán  $C_1$  y  $C_2$

B) Consideremos que sea  $OI = a/3$

Sea  $T$  el punto en que la bisectriz interna de  $A$  corta de nuevo a la circunscrita.

Se tiene que  $TB = TI = TC = \frac{a}{2 \cos(\alpha/2)}$

$IO = a/3$

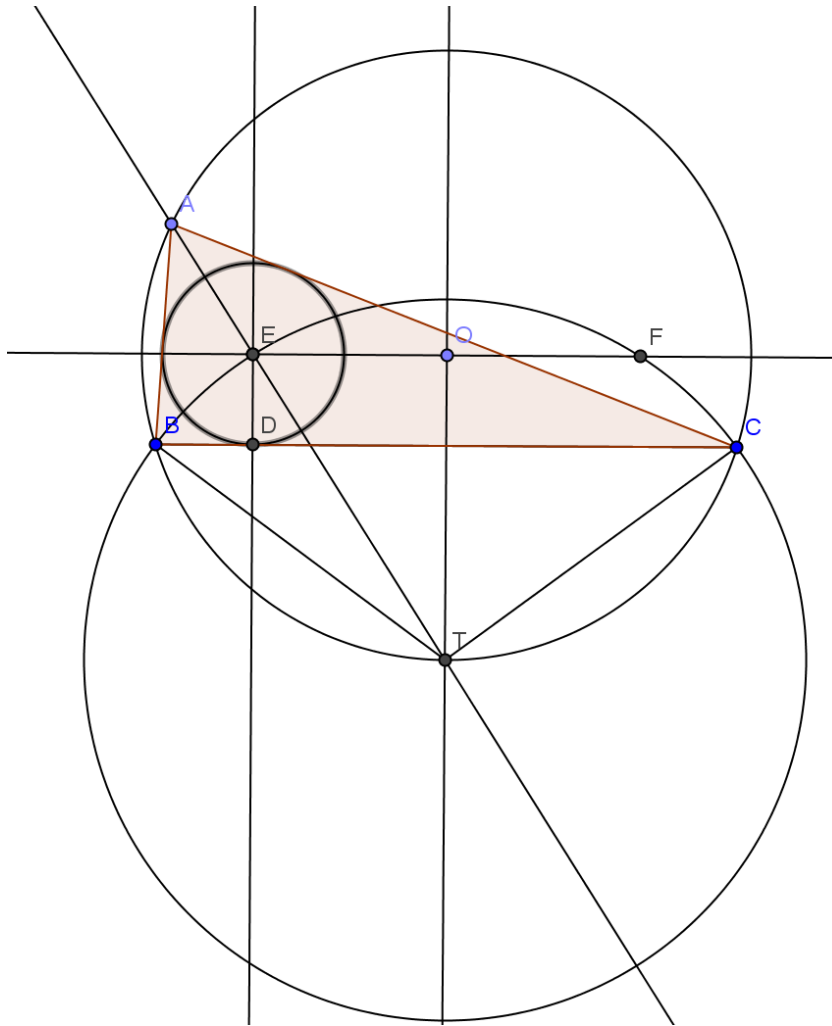
$OT = R = \frac{a}{2 \sin(\alpha)}$

El triángulo  $OIT$  es rectángulo en  $O$ , por lo que ha de ser:

$$\frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{4 \sin^2(\alpha)} = \frac{a^2}{4 \cos^2(\alpha/2)}$$

Que nos lleva a  $-4 \cos^2(\alpha) + 18 \cos(\alpha) - 5 = 0$

Y el resultado válido es  $\cos(\alpha) = 0.29743$ , con lo que  $\alpha = 72.69^\circ$ .



Para terminar, aunque el problema no lo pide, los ángulos en B y C son 86.21 y 21.08 los tres ángulos con aproximación a las centésimas.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla