

Problema 908

Construïu un triangle $\triangle ABC$ en què la recta incentre I , circumcentre O , siga paral·lela a BC .

- Per a quins angles A no és possible la construcció?
- Quin angle ha de ser A a fi que $d(I, O) = \frac{1}{3}d(B, C)$

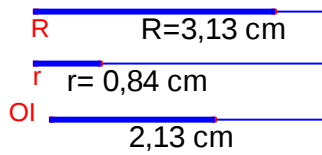
Solució:

Aplicant el teorema d'Euler:

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

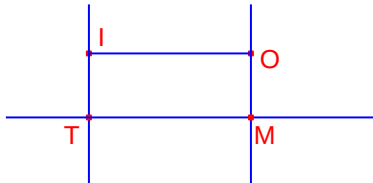
Construcció:

Definim R , r i calculem $\overline{OI}$



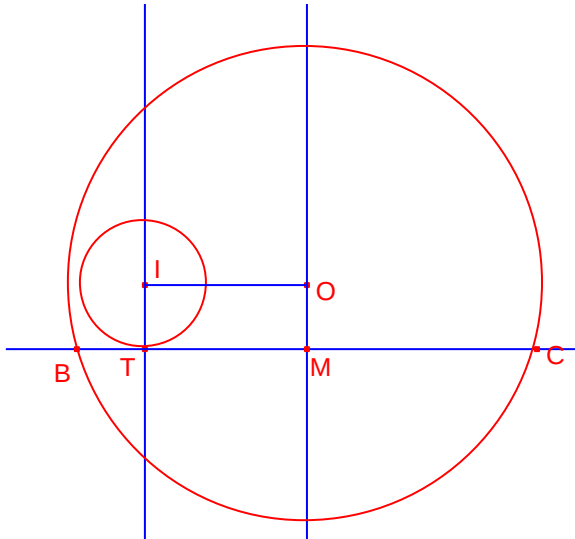
Dibuixem $\overline{OI}$ i tracem les perpendiculars $\overline{OM} = r$, $\overline{IT} = r$.

Dibuixem la recta TM

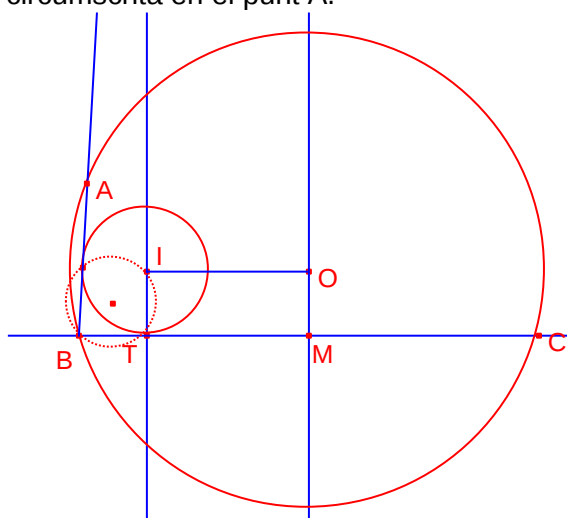


Dibuixem la circumferència inscrita i la circumscrita:

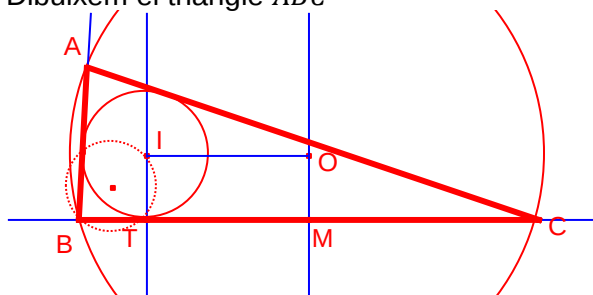
La circumferència circumscrita talla la recta TM en els punts B , C .



Pel punt B tracem una recta tangent a la circumferència inscrita que talla la circumscrita en el punt A.



Dibuixem el triangle $\triangle ABC$



a)

$$\angle OCM = 90^\circ - A$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle OMC$

$$\frac{r}{R} = \sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Aleshores, } 0 < \cos A \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Aleshores, } 60^\circ \leq A < 90^\circ$$

b)

Pel teorema d'Euler: $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

Aleshores:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2\sin A}\right)^2 - 2 \frac{a}{2\sin A} \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2\sin A}\right) \cos A$$

Simplificant:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{4\sin^2 A} - \frac{\cos A}{2\sin^2 A}$$

$$4\cos^2 A - 18\cos A + 5 = 0$$

$$\text{Resolent l'equació: } \cos A = \frac{9 - \sqrt{61}}{4}$$

$$A = \arccos\left(\frac{9 - \sqrt{61}}{4}\right) \approx 72,69623688^\circ$$

