Problema 908

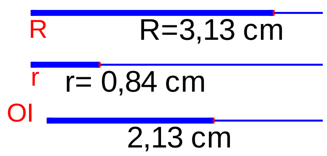
Construir un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ en que la recta incentro I, circuncentro O, sea paralela a BC.

a) ¿Para qué ángulos A no es posible la construcción?4

b) ¿Qué ángulo tiene que ser A para que $d(I,O) = \frac{1}{3}d(B,C)$

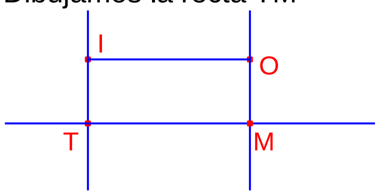
Solución:
Aplicando el teorema e 'Euler:
$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

Construcción:
Definimos R, r y calculemos $\overline{OI}$

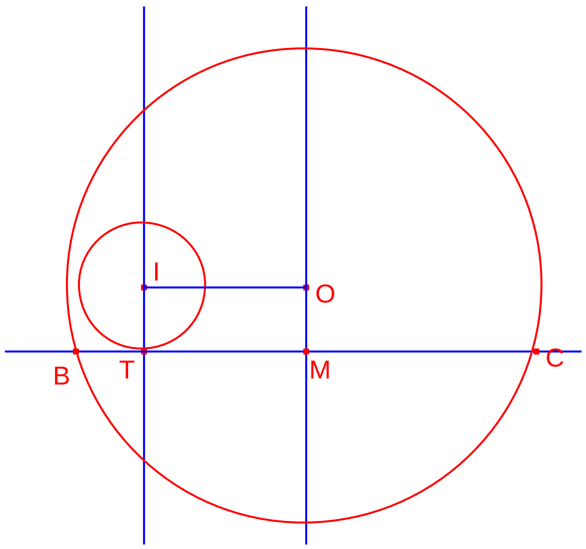


n

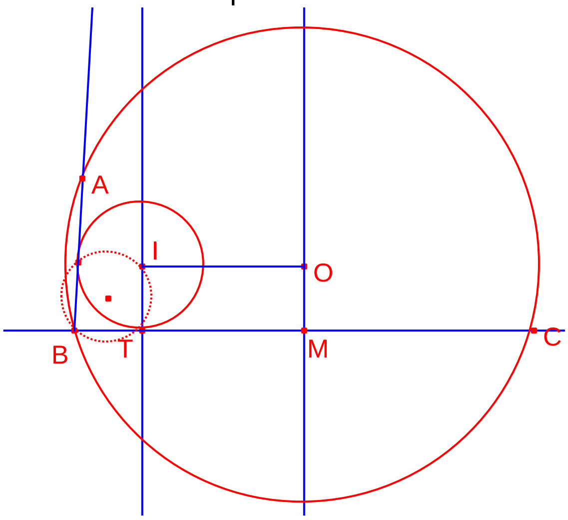
Dibujamos $\overline{OI}$ y trazamos las perpendiculares $\overline{OM} = r, \overline{IT} = r$.
Dibujamos la recta TM



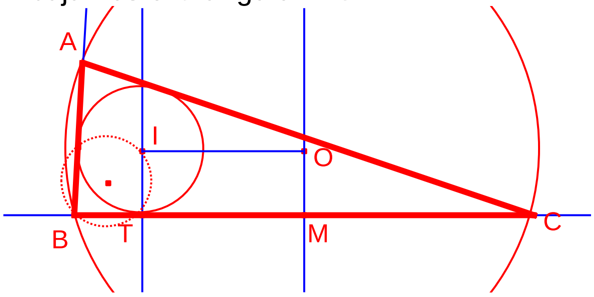
Dibujamos la circunferencia inscrita y la circunscrita:
La circunferencia circunscrita corta la recta TM en los puntos B, C.



Por el punto B trazamos una recta tangente a la circunferencia inscrita que corta la circunscrita en el punto A.



Dibujamos el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$



a)

$\angle OCM = 90º - A$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{OMC}$

$$\frac{r}{R} = \sin(90º - A) = cosA$$

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

Entonces, $0 < cosA \leq \frac{1}{2}$

Entonces, $60° \leq A < 90°$

b)

Por el teorema de Euler: $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

Entonces:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2sinA}\right)^2 - 2\frac{a}{2sinA}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2sinA}\right)cosA$$

Simplificando:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{4sin^2A} - \frac{cosA}{2sin^2A}$$

$$4cos^2A - 18cosA + 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación: $cosA = \frac{9-\sqrt{61}}{4}$

$$A = arccos\left(\frac{9-\sqrt{61}}{4}\right) \approx 72{,}69623688°$$