

Problema 908

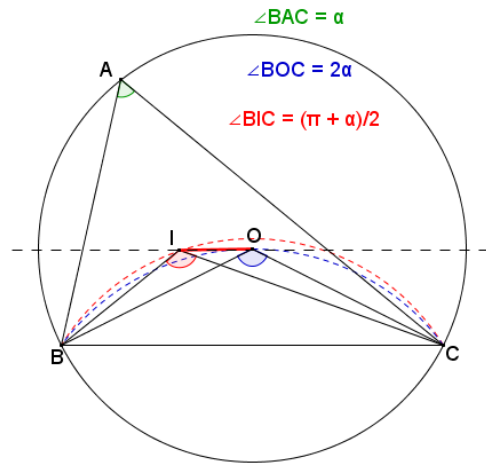
Construir un triángulo ABC en el que la recta Incentro, I, Circuncentro, O, sea paralela a BC.

A) ¿Para qué ángulos de A no es posible la construcción?

B) ¿Qué ángulo debe tener A para que $d(I,O) = (1/3)(d(B,C))$

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Question A)

Réponse : on peut construire le triangle ABC ssi $60^\circ \leq \angle BAC < 90^\circ$.

Soit $\angle BAC = \alpha$. On en déduit $\angle BIC = (\pi + \alpha)/2$ et $\angle BOC = 2\alpha$.

Soit P un point courant de la parallèle (Δ) passant par O à la droite [BC]. Le triangle OBC est isocèle de sommet O et $\angle BPC \leq \angle BOC$ avec égalité quand P est en O.

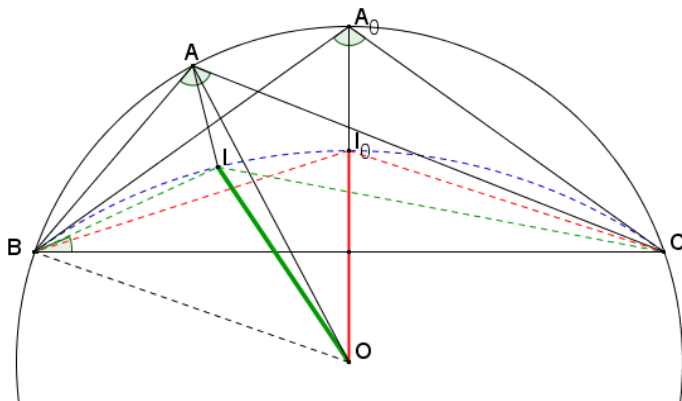
Dès lors la droite [IO] est parallèle à la droite [BC] si et seulement si $\angle BIC \leq \angle BOC$, soit $(\pi + \alpha)/2 \leq 2\alpha$ ou encore $\alpha \geq \pi/3 = 60^\circ$.

Par ailleurs comme $\angle BOC < \pi$, on a nécessairement $\alpha < \pi/2 = 90^\circ$. Lorsque $\alpha > \pi/3$, il est possible de construire un triangle ABC tel que la droite [IO] est parallèle à la droite [BC]. Soit le cercle de centre O s'appuyant sur la corde tel que $\angle BOC = 2\alpha > 120^\circ$. Lorsque A parcourt le grand arc de cercle (BC), la droite [IO] pivote autour du point O. Quand A vient en B, la droite [IO] se confond avec la droite [BO] de pente > 0 et quand A vient en C, la droite [IO] se confond avec la droite [OC] de pente < 0 . Par continuité, il y a donc deux points de l'arc (BC) tels que la droite [IO] est parallèle à la droite [BC] de pente nulle.

Question B)

Réponse : avec $\angle BAC = 72,695..^\circ$ on peut construire le triangle ABC tel que $IO = BC/3$

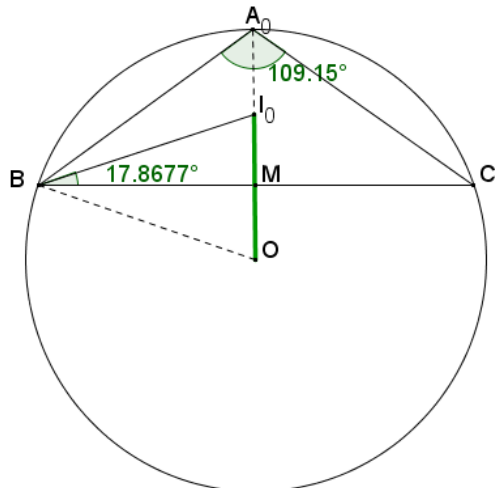
Dans un premier temps, on démontre que dans un triangle quelconque $IO = BC/3$ ssi $\angle BAC = 109,15..^\circ$



Lemme : dans un triangle BAC dont on connaît le côté BC et l'angle $\angle BAC = \alpha$, le rapport IO/BC est minimal quand le triangle BAC est isocèle de sommet A_0 .

Démonstration : soit I_0 le centre du cercle inscrit du triangle A_0BC . Les deux points I et I_0 sont sur l'arc de cercle sous-tendu par la corde BC d'angle $\angle BIC = \angle BI_0C = (\pi + \alpha)/2$.

A l'évidence $OI \geq OI_0$.



On calcule alors dans le triangle isocèle A_0BC de sommet A_0 et d'angle $\angle BA_0C = \alpha$ le rapport I_0O/BC en fonction de α . D'où les relations d'angles :

$\angle BA_0M = \alpha/2$, $\angle A_0BM = (\pi - \alpha)/2$, $\angle I_0BM = (\pi - \alpha)/4$, $\angle OBM = \alpha - \pi/2$.

Sans perte de généralité on pose $BC = 1$.

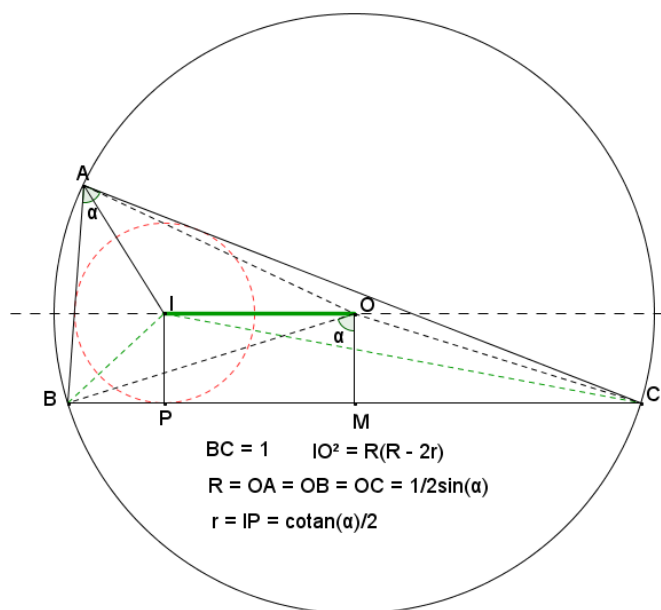
D'où $I_0O = I_0M + MO = \tan((\pi - \alpha)/4) + \tan(\alpha - \pi/2)$

Le rapport $I_0O/BC = 1/3$ est obtenu avec l'équation $\tan((\pi - \alpha)/4) + \tan(\alpha - \pi/2) = 1/3$ qui donne $\alpha_0 = 109,15..^\circ$

Si $\alpha > \alpha_0$, alors $IO/BC > I_0O/BC > 1/3$.

A l'inverse si $\alpha < \alpha_0$, $I_0O/BC < 1/3$ et il existe toujours un point A de l'arc (BC) tel que $IO/BC = 1/3 > I_0O/BC$.

Conclusion : pour tout angle α compris entre 60° et $109,15..^\circ$, il est possible de construire un triangle ABC dans lequel IO est parallèle à BC et $IO = BC/3$.



Calcul de l'angle α tel que les droites [IO] et [BC] sont parallèles et $IO = BC/3$.

Sans perte de généralité on pose $BC = 1$.

D'après la figure ci-contre on a les relations suivantes :

R = rayon du cercle circonscrit au triangle ABC = $OB = 1/2\sin(\alpha)$

r = rayon du cercle inscrit = $IP = OM = \cotan(\alpha)/2$.

Par ailleurs d'après le [théorème d'Euler](#) on sait que la distance entre O et I est donnée par la formule

$$IO^2 = R(R - 2r).$$

D'où $1/2\sin(\alpha) * (1/2\sin(\alpha) - \cotan(\alpha)/2) = (1/3)^2 = 1/9$,

ce qui donne $4\cos^2(\alpha) - 18\cos(\alpha) + 5 = 0$, équation du deuxième degré qui a pour solution unique

$$\cos(\alpha) = (9 - \sqrt{61})/4 \text{ soit } \alpha = 72,6962...^\circ$$