

Problema 908.-

Construir un triángulo ABC en el que la recta Incentro I , Circuncentro O , sea paralela a BC .

A) ¿Para qué ángulos de A no es posible la construcción?

B) ¿Qué ángulo debe tener A para que $d(I, O) = \frac{1}{3}d(B, C)$?

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

A) El punto I es interior al triángulo. La condición de paralelismo de OI con BC obliga a que también sea interior el punto O , por tanto el ángulo A no puede ser obtuso, ni recto.

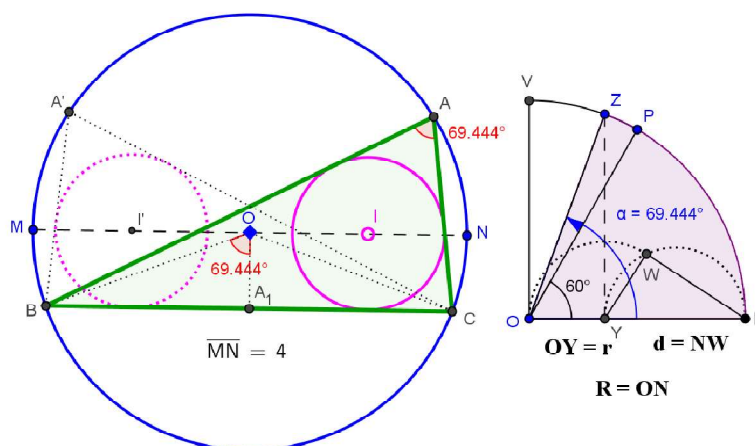
En un triángulo cualquiera el triángulo OBC es isósceles (O = circuncentro) y la longitud de su altura (sobre BC) es $OA_1 = R \cdot \cos A$.

Si la recta OI es paralela a BC , la distancia a BC de cualquier punto de esta recta es la misma, es decir el radio de la circunferencia inscrita es $r = R \cdot \cos A$.

Según el teorema de Euler $d^2 = OI^2 = R^2 - 2rR$. Poniendo $r = R \cos A$, tendremos

$$d^2 = OI^2 = R^2 - 2R^2 \cos A$$

de donde se deduce que $A \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ y por tanto $0 < r < \frac{R}{2}$, para que d sea positivo, BC y OI paralelas.



Para construir un triángulo así se puede tomar un valor para el radio R de la circunferencia circunscrita y otro para r , en función de él, respetando las acotaciones mencionadas. En el dibujo se ha tomado $R = 2$ y un diámetro MN en el que vamos a situar el incentro I .

Con estos dos valores se calcula (se construye) d . Con d se puede fijar el punto I que permite trazar la circunferencia inscrita. La recta BC es la situada en el semiplano inferior (respecto de MN) paralela a ella a distancia r . También se puede hacer a partir del ángulo A y construir el triángulo isósceles OBC . Su altura desde O es r ; con R y r construimos d y la circunferencia inscrita. En cualquier caso trazando desde B o desde C las tangentes a esa circunferencia determinamos el vértice A .

Por simetría de A respecto de la mediatriz de BC se obtiene otro triángulo solución.

B) Por el teorema de los senos $a = BC = 2R \sin A$, por tanto se ha de verificar

$$d^2 = R^2 - 2R^2 \cos A = \frac{4}{9}R^2 \cdot \sin^2 A = \frac{4}{9} \cdot R^2 (1 - \cos^2 A).$$

o bien

$$4 \cos^2 A - 18 \cos A + 5 = 0.$$

$$\cos A = \frac{9-\sqrt{61}}{4}, \text{ de donde } A = 72.6962^\circ$$

Tomando una circunferencia de radio $R = OM = 2$ en la parte derecha de la figura puede verse que $SU = 2 \cdot \cos A = R \cdot \cos A = r$, radio de la circunferencia inscrita. La recta BC se construye según se dijo antes. Con radio igual a la tercera parte de BC y centro O construimos el punto I : incentro del triángulo. Trazada la circunferencia inscrita, sus tangentes desde C (o desde B) sirven para determinar el vértice A que completa la construcción.

Hay una segunda solución que es el triángulo simétrico respecto de la mediatriz de BC .

