TRIÁNGULOS CABRI

Problema 909. (Barroso, R. (2019))

① Construir un triángulo ABC con baricentro G e incentro I tal que la recta GI sea paralela a la recta BC.

② Hallar las longitudes a, b y c de sus lados para que $GI = \frac{a}{9}$.

Solución:

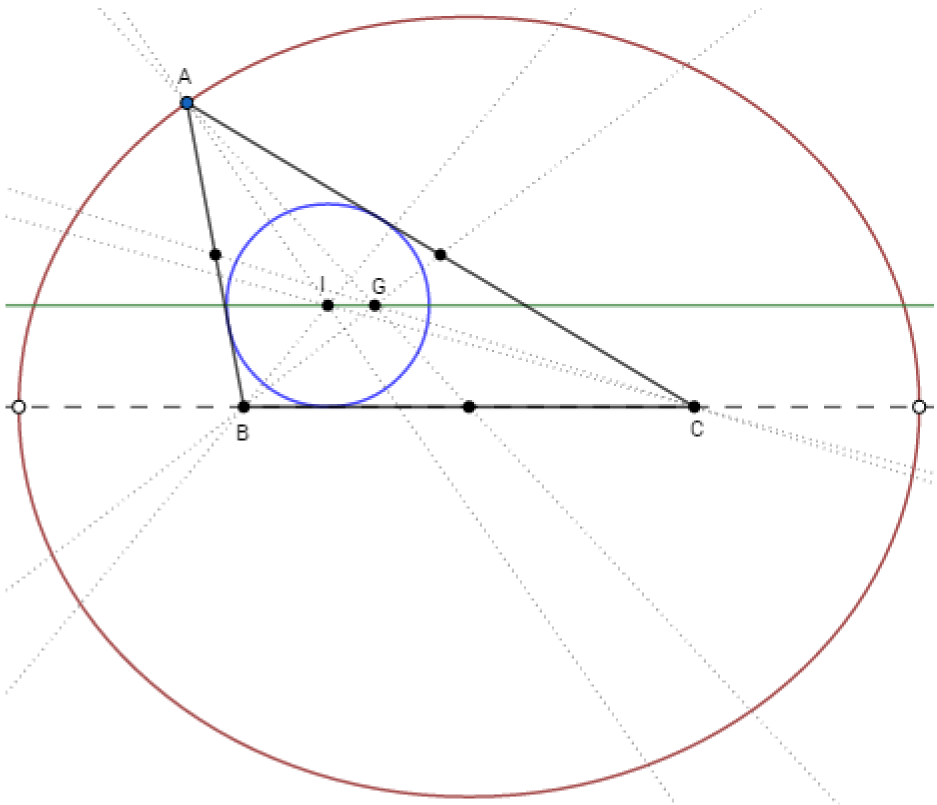
① Dado un segmento BC de longitud a, si A es un punto cualquiera tal que el triángulo ABC verifica la condición del enunciado, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} G = (1:1:1) \\ I = (a:b:c) \end{cases}$$

y $BC_\infty = (0:1:-1)$, entonces:

$$GI \parallel BC \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a - b - c \Leftrightarrow 2a = b + c$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre la elipse con focos en los puntos B y C y cuya suma de distancias es igual a $2a$ (exceptuando los dos puntos en los que dicha elipse corta a la recta BC, ya que, en estos casos, los tres puntos estarían alineados y no formarían un triángulo):



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

② Como:

$$a=\frac{b+c}{2}\Rightarrow\begin{cases}S_A=\dfrac{3b^2-2bc+3c^2}{8}\\ S_B=\dfrac{-3b^2+2bc+5c^2}{8}\\ S_C=\dfrac{5b^2+2bc-3c^2}{8}\end{cases}$$

entonces:

$$GI^2=S_A\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2+S_B\left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2+S_C\left(\frac{c}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2\underset{a=\frac{b+c}{2}}{=}\frac{(b-c)^2}{36}$$

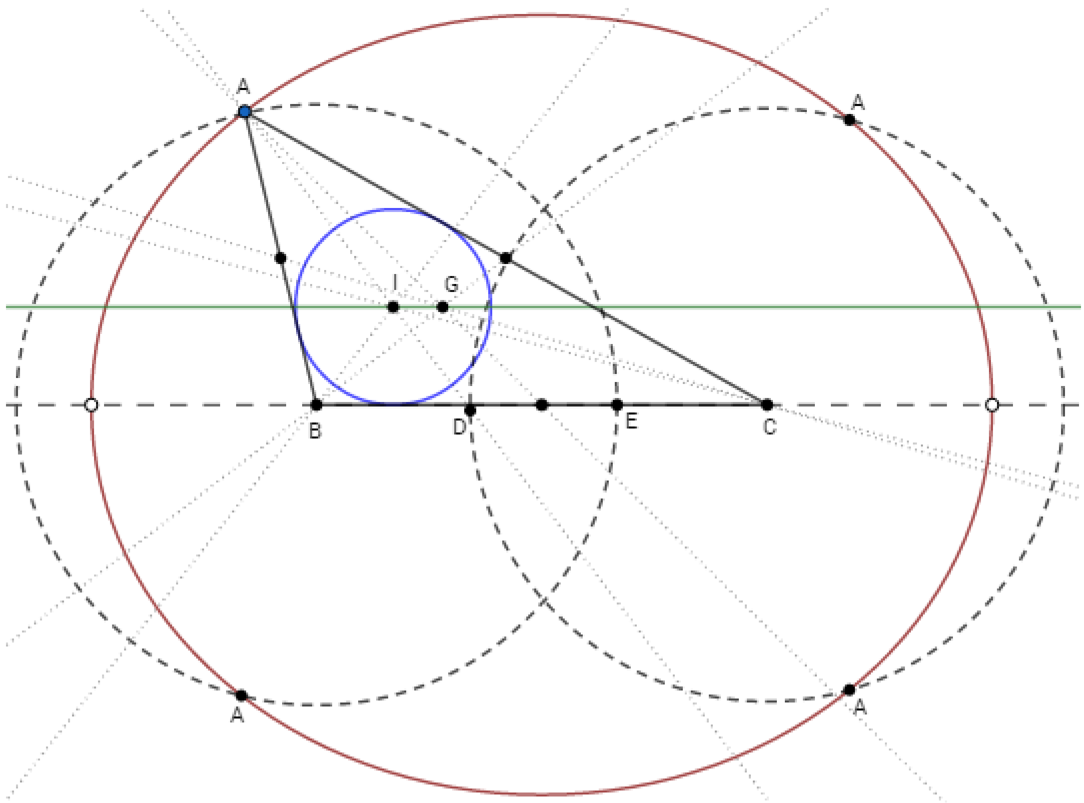
por lo que:

☺ Si $c<b$, resulta que:

$$\frac{b-c}{6}=\frac{a}{9}=\frac{b+c}{18}\Rightarrow c=\frac{b}{2}\Rightarrow a=\frac{3b}{4}\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{4a}{3}\\ c=\dfrac{2a}{3}\end{cases}$$

☹ Si $c>b$, resulta que:

$$\frac{c-b}{6}=\frac{a}{9}=\frac{b+c}{18}\Rightarrow c=2b\Rightarrow a=\frac{3b}{2}\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{2a}{3}\\ c=\dfrac{4a}{3}\end{cases}$$



Por tanto, considerando los puntos D y E que dividen el segmento BC en tres partes iguales, el punto A debe estar situado en alguno de los cuatro puntos de corte entre la elipse considerada y las circunferencias centradas en los puntos B y C y cuyos radios son BE y CD, respectivamente.