Pr. Cabri 909

Enunciado

Construir un triángulo ABC tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela a BC.
Hallar los lados a,b,c, si d(G,I)=a/9.
Barroso, R. (2019).

Solución

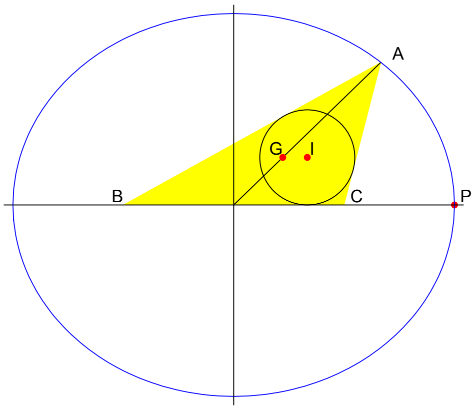
de César Beade Franco

Apartado A

Consideremos un triángulo de vértices A(eh, $\sqrt{(1+e^2)(1-h^2)}$), B(-1,0) y C(1,0) (1).
Para este triángulo G=($\frac{eh}{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}$) e I=($h$, $\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$), donde las ordenadas indican la distancia de estos puntos al lado BC y han de coincidir si GI es paralela a BC.
Resovemos para e $\frac{1}{3}\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}=\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$, obteniendo e=$2$.
Esto significa que el vértice A está sobre una elipse de focos B y C y excentricidad $\frac{1}{2}$, por lo que se cumple que b+c=4. Si la longitud de BC es a, la relación entre los lados queda b+c=2a (están en progresión aritmética). Cosntruyendo puntos de esta elipse se obtienen triángulos con esta propiedad (2).

Apartado B

Para un triángulo de estas características G=($\frac{2h}{3}$, $\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{3}}$) e I=($h$, $\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{3}}$). Si nos imponen la condición d(G,I)=a/9, resolvemos la ecuación $|GI|=\frac{2}{9}\Rightarrow\frac{h}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow h=\frac{2}{3}$. Es decir, A=($\frac{4}{3}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$).
Así pues los lados miden 2, $\frac{4}{3}$ y $\frac{8}{3}$ y en general (multiplicando por $\frac{a}{2}$), a, $\frac{2a}{3}$ y $\frac{4a}{3}$.



Por cierto, para estos triángulos, esta distancia es siempre menor que $\frac{a}{3}$.

Notas

(1) Un EH-triángulo. Ver, por ejemplo los problemas 689 u 897 de esta página donde se explica el significado de e y h.
(2) Tal construcción euclídea se puede ver en el problema 801 (solución de J. Santamaría) o en el 803 (solución de C. Beade).