<u>Problema 909.-</u>
1.- Construir un triángulo ABC tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela a BC.
2.- Hallar los lados $a, b, c,\ \ si\ d(G, I) = \frac{a}{9}$.

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

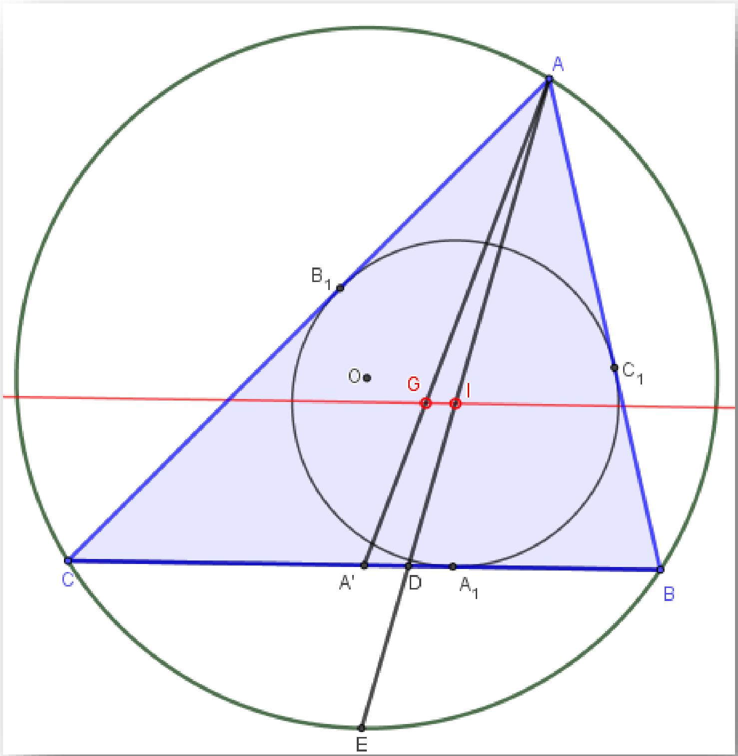
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

1.- Sea $v_a = AD$ la bisectriz interior relativa al ángulo A y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Se verifica siempre que:

$$\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}.$$

Esto es así, sin más que considerar la relación de áreas en los siguientes triángulos:

$$\frac{[AIC]}{[IDC]} = \frac{[AIB]}{[IDB]} = \frac{AI}{ID} \to \frac{[AIC]+[AIB]}{[IDC]+[IDB]} = \frac{[AIC]+[AIB]}{[ICB]} = \frac{AI}{ID}.$$



Ahora bien,

$$\frac{[AIC]+[AIB]}{[ICB]} = \frac{br+cr}{ar} = \frac{b+c}{a} = \frac{AI}{ID}.$$

Por tanto, si la recta GI (baricentro, incentro), es paralela a BC, deberá suceder que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GA'} = 2.$$

Entonces, se cumplirá que $b + c = 2a$.

También se verificará si la recta GI es paralela a BC, que $\frac{GI}{A'D} = \frac{2}{3} \to A'D = \frac{3}{2}\,GI$.

Ahora bien, por el Teorema de la bisectriz, $\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{BD+CD}{b+c} = \frac{a}{b+c} \to BD = \frac{ac}{b+c}$.

Como quiera que:

$$A'B = \frac{a}{2}, A'D = A'B - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{ab-ac}{2(b+c)} = \frac{a}{2}\frac{b-c}{b+c} = \frac{b-c}{4}.$$

De este modo, podemos deducir que entonces:

$$b - c = 4A'D = 6GI.$$

En definitiva, hemos deducido que si la recta IG es paralela al lado BC, entonces se deben verificar las dos siguientes relaciones:

$$\begin{cases} b + c = 2a \\ b - c = 6\,GI \end{cases}$$

Ahora bien, como $A'A_1 = \frac{1}{2}a - BA_1 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a - b + c) = \frac{1}{2}(b - c)$. Como quiera que $A'D = \frac{b-c}{4}$, resultará que D, en esas circunstancias, será el punto medio de AA_1. De este hecho se deduce que $A'D < \frac{1}{4}a \to GI < \frac{2}{3}\frac{1}{4}a = \frac{1}{6}a$.

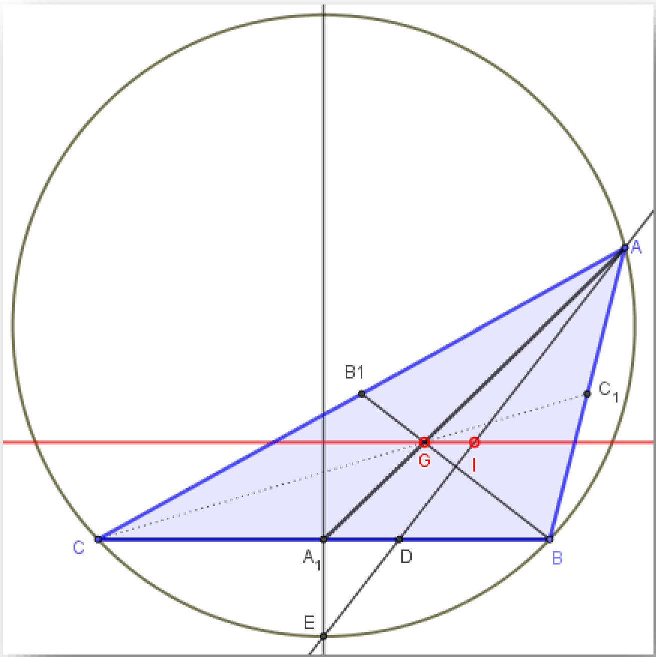
Resumiendo, para que podamos construir un triángulo con esa condición, de ser la recta GI paralela al lado BC debe verificarse:

$$\begin{cases} b+c=2a \\ b-c=6\,GI \end{cases}$$
$$GI<\frac{1}{6}a.$$

2.- Hallar los lados $a,b,c,\;\; si\; d(G,I)=\frac{a}{9}$.

Observamos en primer lugar que al ser $d(G,I)=\frac{a}{9}$, se verifica que $d(G,I)<\frac{1}{6}a$. Por tanto, se puede construir dicho triángulo.

$$\begin{cases} b+c=2a \\ b-c=6\,GI \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=a+3\,GI=a+\dfrac{a}{3}=\dfrac{4a}{3} \\ c=a-3\,GI=a-\dfrac{a}{3}=\dfrac{2a}{3} \end{cases}$$



En definitiva, los lados de dicho triángulo serán $\{a,b,c\}=\{3,4,2\}$ o proporcionales a dichos valores.