Problema 909

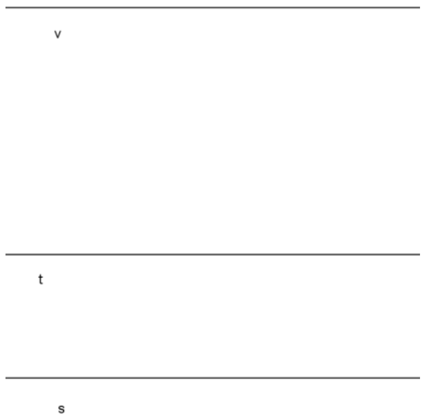
A) Construir un triángulo ABC tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela a BC.
B) Hallar los lados si d(G,I)=a/9.

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

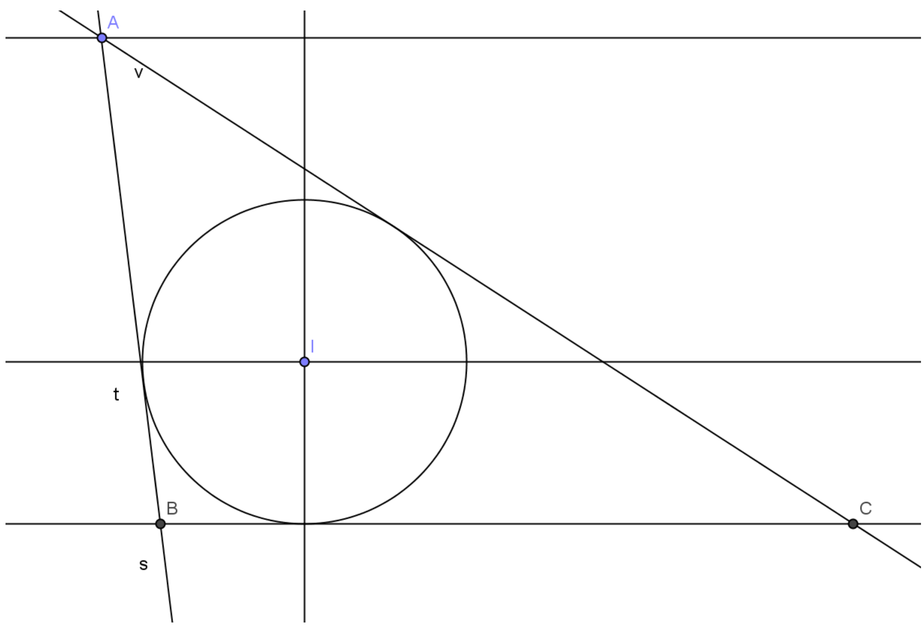
Solución del director.

A) Tomemos dos rectas s y t paralelas a distancia r. En s van a estar B y C y en t van a estar G e I.

Construyamos otra recta v paralela a s a distancia 3r. En v va a estar A.

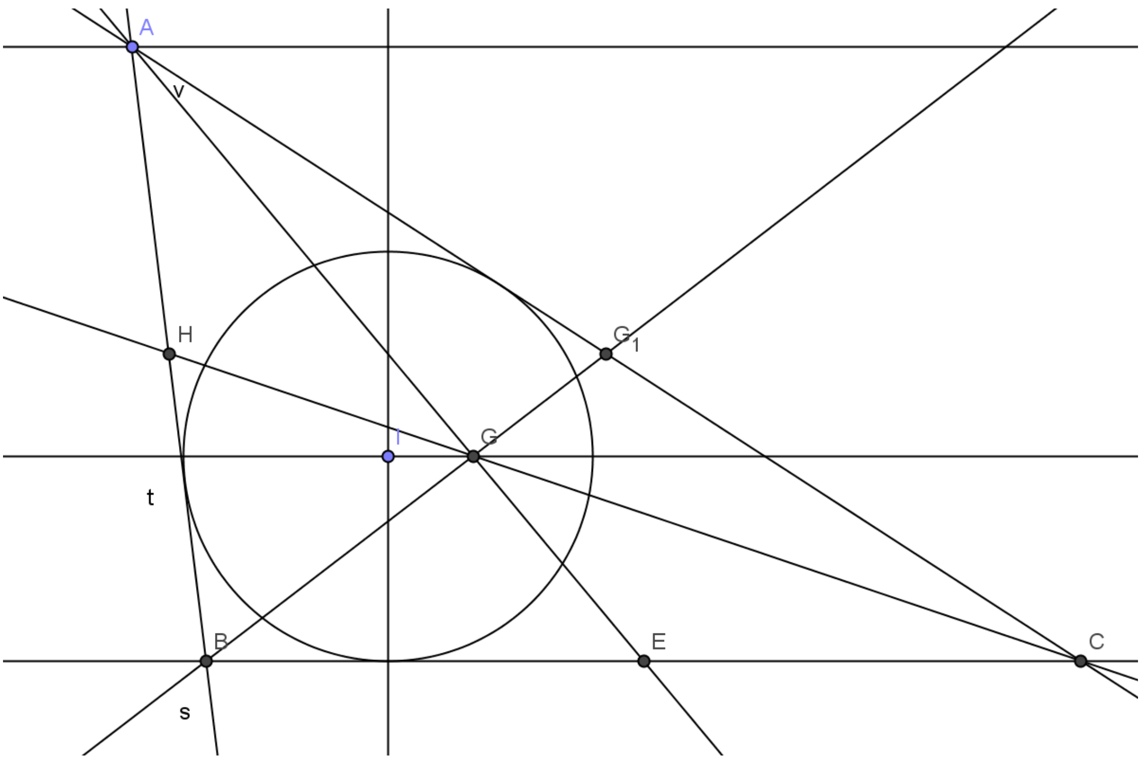


Tomemos un punto I (que será el incentro) en s, y construyamos la circunferencia inscrita Γ de centro I y radio r.



Tomemos un punto cualquiera A en v, y tracemos las tangentes por A a Γ, que cortarán a s en B y C. Así tenemos el triángulo pedido.

G estará en t, pues la distancia de G a BC es 1/3 h.

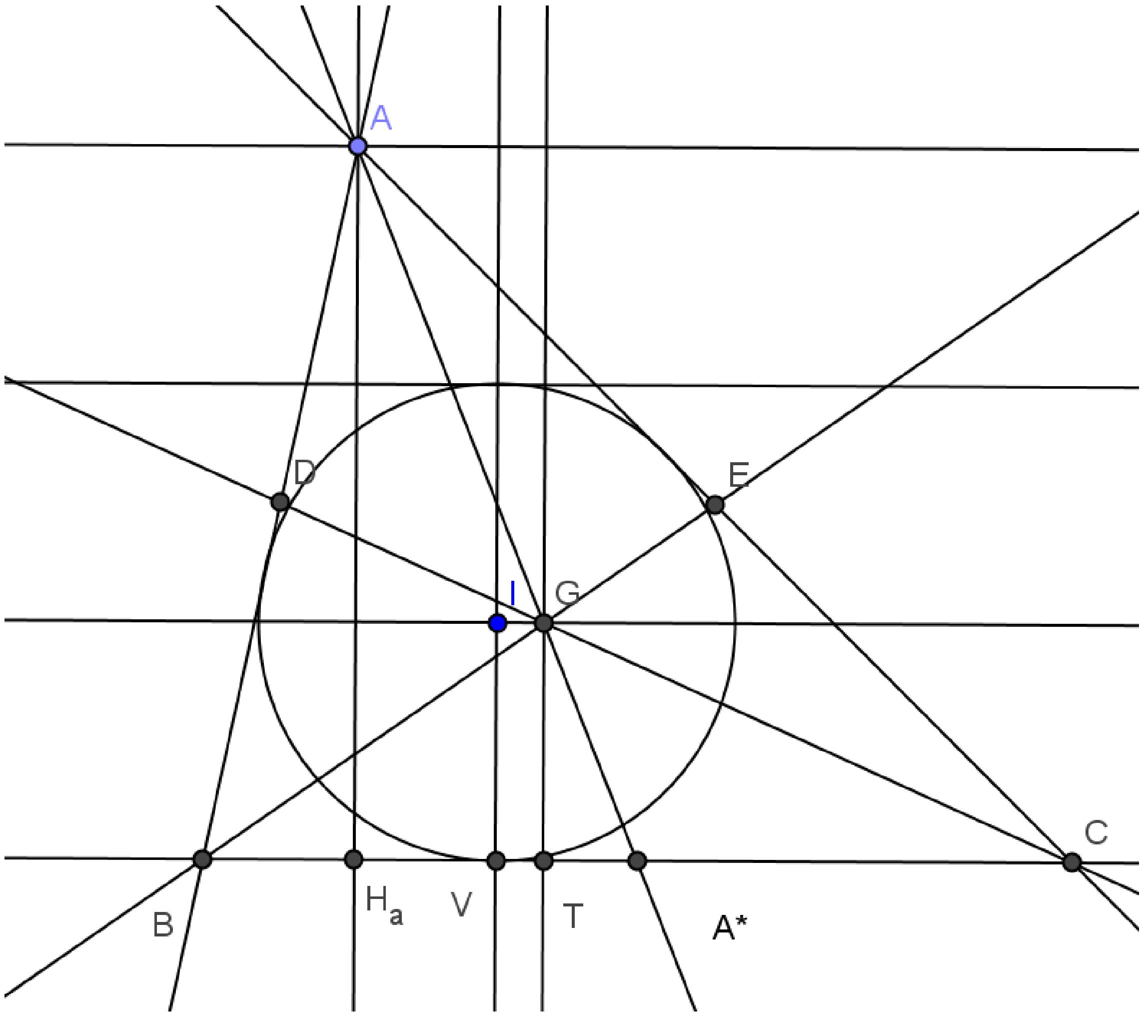


Dado que sabemos que

$$h\ a = r(a+b+c), y\ que\ en\ este\ caso\ r = \frac{h}{3}, debe\ ser\ b+c = 2a, b = 2a - c$$

B) Estudiemos en este caso de paralelismo de GI con BC, la distancia de los puntos G I, para estudiar el caso d(G,I)=a/9.

Supongamos el triángulo resuelto.



Supongamos que es acutángulo, y sin pérdida de generalidad, que b>c.

Sea H_a el pie de la altura de a.

Busquemos $x=BH_a$

Es $x^2+h^2=c^2$ Es $(a-x)^2+h^2=c^2$, de donde $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$, y al ser b=2a-c, es

$$x=\frac{a^2+c^2-4a^2-c^2+4ac}{2a}=\frac{4c-3a}{2}$$

$$BV=\frac{a+c-b}{2}=\frac{2c-a}{2}$$

$H_aV=BV-BH_a=a-c$,

$A^*H_a=A^*B-H_aB=\frac{a}{2}-\frac{4c-3a}{2}=2a-2c$

Así al ser A*GT semejante a A^*AH_a de razón 1/3, $A^*T=\frac{2a-2c}{3}$

De esta manera podemos encontrar VT :

$VT= BA^*- BV - TA^*=\frac{a}{2}-\frac{2c-a}{2}-\frac{2a-2c}{3}=\frac{a-c}{3}$

Así pues deseamos que d(G,I)=a/9, pero siendo d(V, T)=d(G,I)=(a-c)/3=a/9, ha de ser

$a=3/2\ c$, $b=2a-c=2c$.

Luego el triángulo pedido es $3/2c$, $2c$, c.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.

España.