TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 909.</u> (Barroso, R. (2019))

① Construir un triángulo ABC con baricentro G e incentro I tal que la recta GI sea paralela a la recta BC.

② Hallar las longitudes a, b y c de sus lados para que $GI = \frac{a}{9}$.

<u>Solución:</u>

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} G = (1:1:1) \\ I = (a:b:c) \end{cases}$$

y $BC_\infty = (0:1:-1)$, entonces:

$$GI \parallel BC \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a - b - c \Leftrightarrow a = \frac{b+c}{2}$$

y, además:

$$\begin{cases} b < a + c < \dfrac{b+c}{2} + c \\ c < a + b < \dfrac{b+c}{2} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 3c \\ c < 3b \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{3} < c < 3b$$

Una vez determinadas las relaciones que deben existir entre las longitudes de los lados del triángulo ABC, pasaremos a construirlo:

❶ Tomamos un segmento cualquiera CA y llamamos $b = CA$.

❷ Sobre la recta CA, construimos otros tres segmentos AE, EF y FJ, todos ellos de igual longitud b, y consideraremos el punto D situado en el segmento AE tal que $AD : AE = 1 : 3$.

❸ Tomamos un punto P cualquiera situado en el interior del segmento DJ, verificándose que:

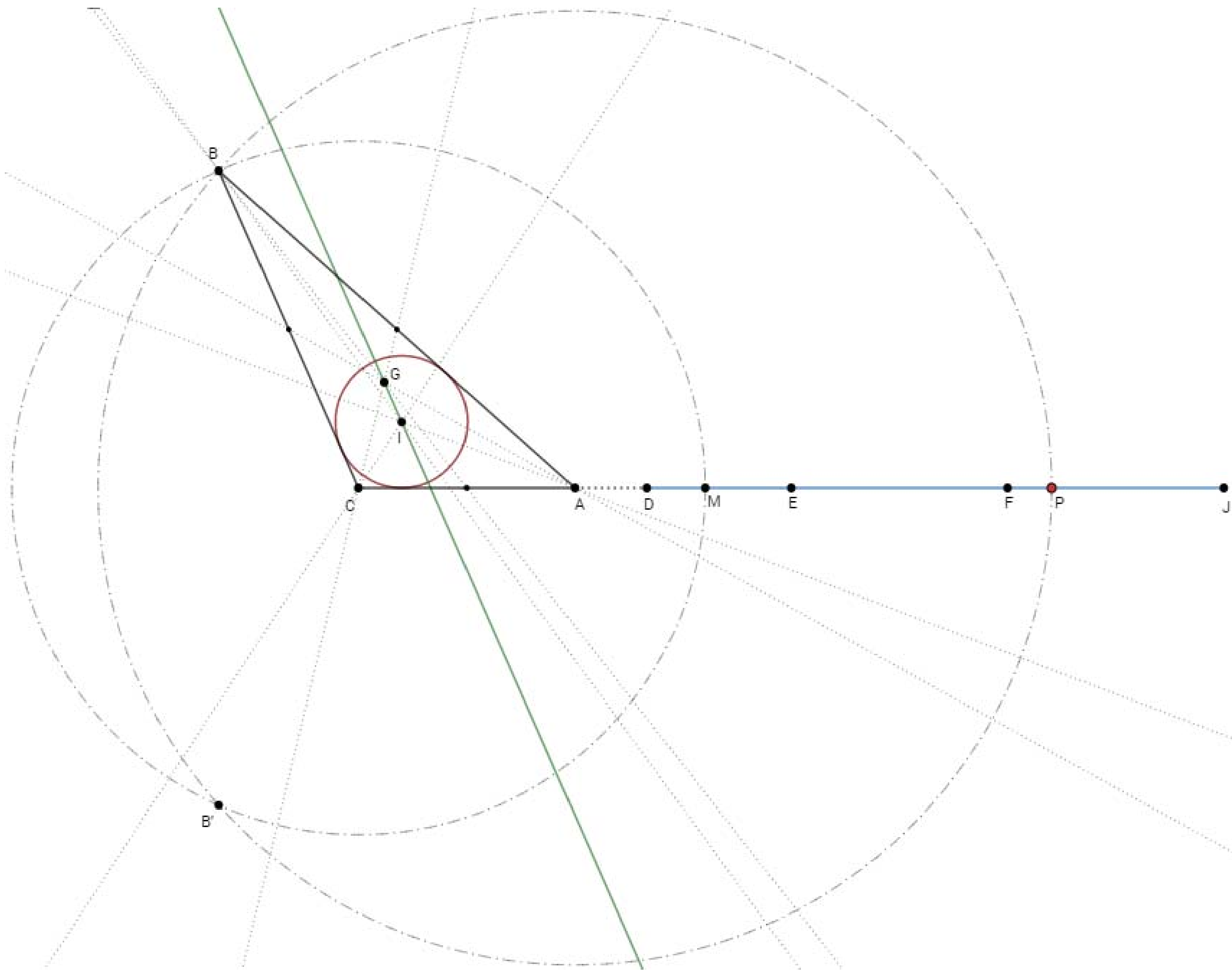
$$\frac{b}{3} = AD < AP < AJ = 3b$$

y consideraremos el punto medio M del segmento CP, verificándose que:

$$CM = \frac{CP}{2} = \frac{CA + AP}{2} = \frac{b + AP}{2}$$

❹ Trazamos la circunferencia centrada en el punto A con radio $c = AP$ y la circunferencia centrada en el punto C con radio $a = CM$, que se cortarán en los puntos B y B', de forma que cualquiera de los dos triángulos ABC o $AB'C$ verifican la condición pedida.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega



② Como:

$$a=\frac{b+c}{2}\Rightarrow\begin{cases}S_A=\dfrac{3b^2-2bc+3c^2}{8}\\ S_B=\dfrac{-3b^2+2bc+5c^2}{8}\\ S_C=\dfrac{5b^2+2bc-3c^2}{8}\end{cases}$$

entonces:

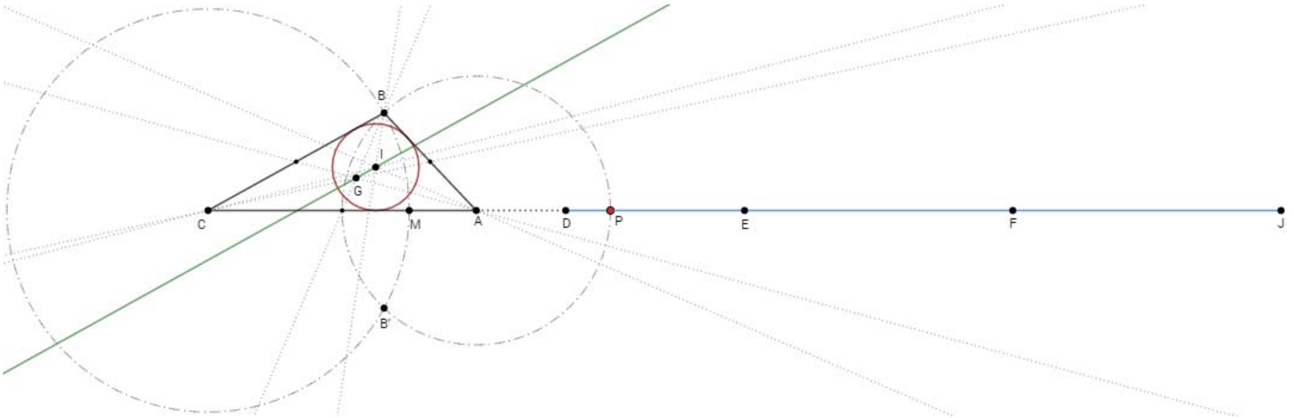
$$GI^2=S_A\left(\frac{a}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2+S_B\left(\frac{b}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2+S_C\left(\frac{c}{a+b+c}-\frac{1}{3}\right)^2\underset{a=\frac{b+c}{2}}{=}\frac{(b-c)^2}{36}$$

por lo que:

☺ Si $c<b$ (es decir, cuando el punto P está situado en el interior del segmento AE), resulta que:

$$\frac{b-c}{6}=\frac{a}{9}=\frac{b+c}{18}\Rightarrow c=\frac{b}{2}\Rightarrow a=\frac{3b}{4}$$

(es decir, el punto P coincide con el punto medio del segmento DE).



☹ Si $c > b$ (es decir, cuando el punto P está situado en el interior del segmento EJ), resulta que:

$$\frac{c-b}{6} = \frac{a}{9} = \frac{b+c}{18} \Rightarrow c = 2b \Rightarrow a = \frac{3b}{2}$$

(es decir, el punto P coincide con el punto F).