

Problema 909

1.- Construïm un triangle $\triangle ABC$ tal que la recta GI (baricentre, incentre), siga paral·lela al costat BC

2.- Determineu els costats a, b, c si $d(G, I) = \frac{a}{9}$.

Solució:

a)

Siga conegut $\overline{GI} = d$, $\overline{BC} = a$, ambos paral·lels.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga la bisectriu $\overline{AV}$.

Siga $\overline{AH}$ altura del triangle.

Los triangles $\triangle AIG$, $\triangle VM$ són semblants i de raó 2:3

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{VM} = \frac{3}{2}d$$

Los triangles $\triangle AHV$, $\triangle ITM$ són semblants i de raó 3:1

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AH} = 3r$$

Calculant les àrees del triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a+b+c}{2}r = \frac{a \cdot 3r}{2}$$

Simplificant:

$$2a = b + c$$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\triangle ABC$

$$\frac{\frac{a}{2} - \frac{3}{2}d}{c} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{3}{2}d}{b}$$

Simplificant:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{3d}{b-c}$$

$$b - c = 6d$$

$$\begin{cases} b + c = 2a \\ b - c = 6d \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$

El problema no té solució quant $a > 3d$, $b - c = 6d < a$

Construcció:

Siguen donats a i d

a = 5,89 cm

$d = 0,76 \text{ cm}$

$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$

$b = 8,18 \text{ cm}$

$c = 3,61 \text{ cm}$

Construïm el triangle $\triangle ABC$

b)

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle ABC

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga la bisectriu $\overline{AV}$.

Siga $\overline{AH}$ altura del triangle.

Siga $\overline{GI} = \frac{a}{9}$ paral·lel al costat $\overline{BC} = a$.

Els triangles $\triangle AIG$, $\triangle AVM$ són semblants i de raó 2:3

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{VM} = \frac{3a}{29} = \frac{a}{6}$$

Els triangles $\triangle AHV$, $\triangle ITM$ són semblants i de raó 3:1

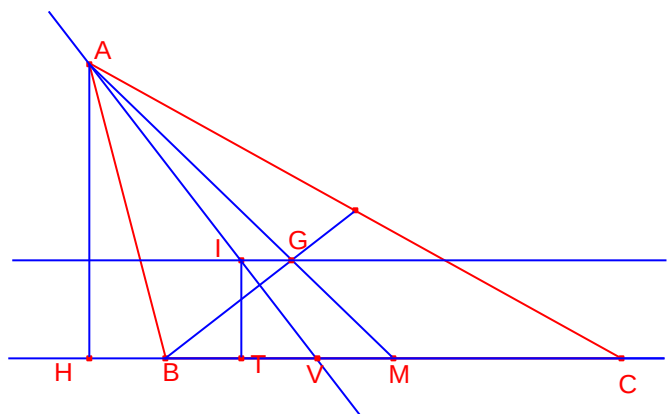
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AH} = 3r$$

Calculant les àrees del triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a + b + c}{2}r = \frac{a \cdot 3r}{2}$$

Simplificant:



$$2a = bc$$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\triangle ABC$

$$\frac{a}{c} = \frac{2a}{b}$$

Simplificant:

$$b = 2c$$

$$2a = 2c + c = 3c$$

$$4a = 3b = 6c$$

Aleshores, la proporció entre els costats és:

$$a:b:c = \frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 3:4:2$$