

Problema 909

1.- Construir un triángulo $\triangle ABC$ tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela al lado BC

2.- Determinar los lados a, b, c si $d(G, I) = \frac{a}{9}$.

Solución:

a)

Sea conocidos $\overline{GI} = d$, $\overline{BC} = a$, ambos paralelos.

Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Sea la bisectriz $\overline{AV}$.

Sea $\overline{AH}$ altura del triángulo.

Los triángulos $\triangle AIG$, $\triangle VM$ son semejantes y de razón 2:3

Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{VM} = \frac{3}{2}d$$

Los triángulos $\triangle AHV$, $\triangle ITM$ son semejantes y de razón 3:1

Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{AH} = 3r$$

Calculando las áreas del triángulo $\triangle ABC$:

$$\frac{a+b+c}{2}r = \frac{a \cdot 3r}{2}$$

Simplificando:

$$2a = b + c$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz al triángulo $\triangle ABC$

$$\frac{\frac{a}{2} - \frac{3}{2}d}{c} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{3}{2}d}{b}$$

Simplificando:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{3d}{b-c}$$

$$b - c = 6d$$

$$\begin{cases} b + c = 2a \\ b - c = 6d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$

El problema no tiene solución cuando $a > 3d$, $b - c = 6d < a$

Construcción:

Sean dados a y d

a = 5,89 cm

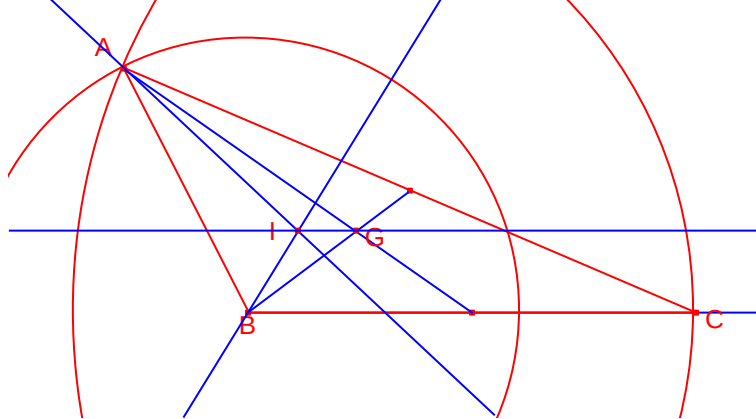
d $d = 0,76 \text{ cm}$

$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = a + 3d \\ c = a - 3d \end{cases}$$

b $b = 8,18 \text{ cm}$

$c = 3,61 \text{ cm}$

Construimos el triángulo $\triangle ABC$



b)

Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Sea la bisectriz $\overline{AV}$.

Sea $\overline{AH}$ altura del triángulo.

Sea $\overline{GI} = \frac{a}{9}$ paralelo al lado $\overline{BC} = a$.

Los triángulos $\triangle AIG$, $\triangle AVM$ son semejantes y de razón 2:3

Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{VM} = \frac{3a}{29} = \frac{a}{6}$$

Los triángulos AHV , ITM son semejantes y de razón 3:1

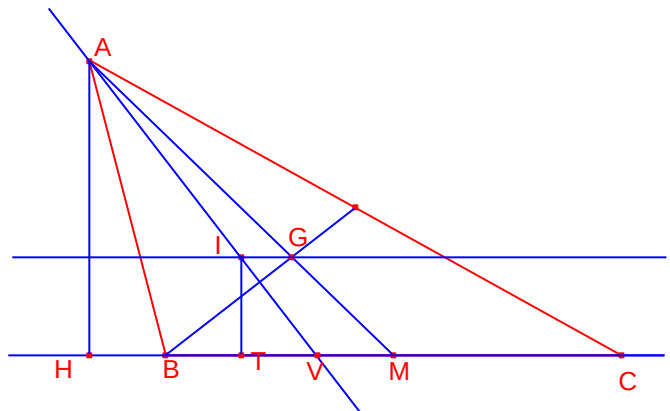
Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{AH} = 3r$$

Calculando las áreas del triángulo $\triangle ABC$:

$$\frac{a + b + c}{2}r = \frac{a \cdot 3r}{2}$$

Simplificando:



$$2a = bc$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz al triángulo $\triangle ABC$

$$\frac{a}{c} = \frac{2a}{b}$$

Simplificando:

$$b = 2c$$

$$2a = 2c + c = 3c$$

$$4a = 3b = 6c$$

Entonces, la proporción entre los lados es:

$$a:b:c = \frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 3:4:2$$