

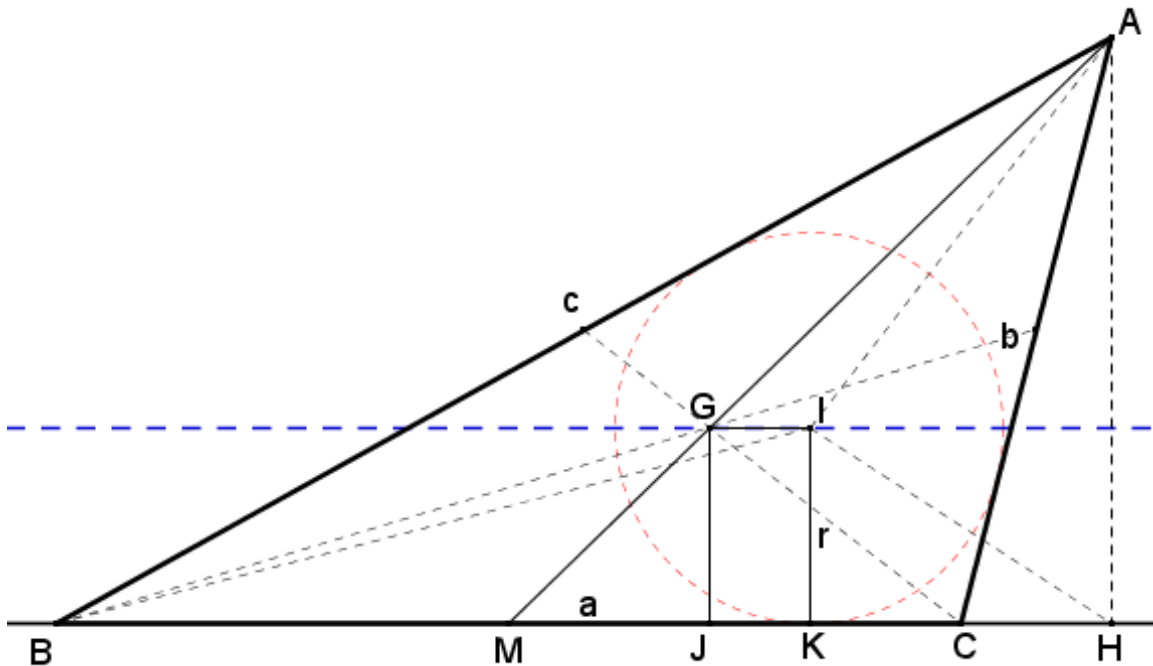
Problema 909

Q_A Construir un triángulo ABC tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela a BC.

Q_B Hallar los lados a, b, c , si $d(G, I) = a/9$.

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On adopte les notations suivantes (voir figure supra) :

$BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$

H est le pied de la hauteur issue de A, J et K sont les projections de G et de I sur le côté BC de milieu M.

$IK = r$ = rayon du cercle inscrit du triangle ABC.

Q_A

L'aire Δ du triangle ABC s'exprime de deux manières : $\Delta = r \cdot \text{demi-périmètre du triangle} = BC \cdot AH / 2$

Si la droite [GI] est parallèle au côté BC, on en déduit : $GJ = IK = r$.

Comme G est le centre de gravité du triangle ABC, on $GM/AM = 1/3$, soit $GJ = AH/3$.

D'où $r = AH/3$ et $r \cdot (a + b + c)/2 = AH \cdot (a + b + c)/6 = a \cdot AH/2$.

Soit : $a + b + c = 3a$ ou encore **$b + c = 2a$** .

La construction du triangle ABC est immédiate : on choisit deux longueurs a et c telles que $a \leq c \leq 2a$. La longueur b se déduit par la relation **$b = 2a - c$** . On trace le côté BC de longueur a puis un premier cercle de centre B et de rayon c et enfin un deuxième cercle de centre C et de rayon $b = 2a - c$. Comme $b + c = 2a > a$, les deux cercles ont toujours deux points d'intersection symétriques par rapport à la droite [BC] et le sommet A est l'un d'entre eux.

Q_B

On pose $BH = x$. D'où $c^2 - x^2 = b^2 - (x - a)^2 \implies x = (a^2 - b^2 + c^2)/2a^{(1)}$.

Comme $b = 2a - c$, on obtient $x = -3a/2 + 2c$

Le point de contact K du cercle inscrit avec le côté BC est tel que $CK = (a + b - c)/2 = (3a - 2c)/2$.

Par ailleurs $MH/MJ = MA/MG = 3$. Donc $MH = BH - BM = x - a/2 = 2(c - a) = 3MJ$

Par hypothèse $GI = JK = a/9$

On écrit que $MJ + JK + KC = MC = BC/2$.

D'où l'équation $2(c - a)/3 + a/9 + (3a - 2c)/2 = a/2 \implies c = 4a/3$ et **$b = 2a/3$**

Par exemple le triangle $(a, b, c) = (3, 4, 2)$ répond à la question.

⁽¹⁾Nota : cette relation reste vraie que le point H soit intérieur ou extérieur au côté BC.

