***Problema* 909.-**

1. Construir un triángulo ABC tal que la recta GI (baricentro, incentro), sea paralela a BC.

2. Hallar los lados a, b, c si $d(G, I) = \frac{a}{9}$.

Barroso, R. (2019): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1. Si GI es paralela a BC la distancia de G a esa recta (igual a la tercera parte de la altura desde A por las propiedades del baricentro) ha de ser igual al radio r de la circunferencia inscrita.

Tendremos pues $\frac{1}{3}c \cdot \text{sen}\, B = r$ y expresando $\text{sen}\, B = \frac{b}{2R}$ (con $R =$ radio de la circunferencia circunscrita) tenemos $\frac{bc}{6R} = r$, o bien $Rr = \frac{bc}{6}$ (1).

De las fórmulas que expresan el área de un triángulo en las que intervienen r y R y el semi-perímetro s tenemos $rs = \frac{abc}{4R}$ que permiten establecer $Rr = \frac{abc}{4s}$ (2).

De las expresiones (1) y (2) se tiene finalmente $\frac{bc}{6} = \frac{abc}{4s}$ o lo que es igual $a = \frac{2}{3s}$ y por tanto $b + c = \frac{4}{3s}$.

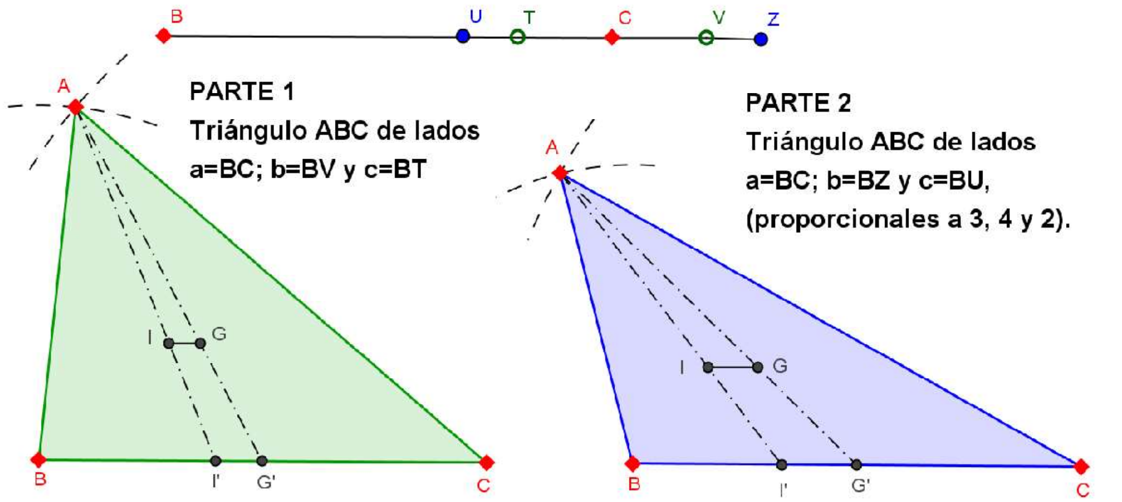
En resumidas cuentas

$$\boxed{2a = b + c \quad (3)}$$

y los tres lados del triángulo están en progresión aritmética.

Recíprocamente si se verifica (3) de la expresión del área $rs = a \cdot \frac{h_A}{2}$, sustituyendo a en función de s, se tiene $2s = 3a$ y $r = \frac{h_A}{3}$ que expresa que la recta GI es paralela a BC.

Sean G', I' son las proyecciones desde A sobre BC de los puntos G, I respectivamente y supongamos que tenemos $c < a < b$.



Por el teorema de la bisectriz $d(G', I') = CI' - CG' = \frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$ por (3) y por la semejanza de los triángulos AGI y $AG'I'$ (de razón 2/3), $d(G, I) = \frac{b-a}{3}$, esto es, **la distancia entre el incentro y el baricentro es igual a la tercera parte de la diferencia de la progresión aritmética formada por las longitudes de los lados.**

La construcción de uno de tales triángulos es elemental una vez elegido a y la diferencia d de la progresión. Los otros dos lados son $c = a - d$ y $b = a + d$, con la condición de ser $d < \frac{a}{2}$ para formar el triángulo.

2. Se ha de verificar $d(G, I) = \frac{b-a}{3} = \frac{a}{9}$, de ahí $b = a + \frac{a}{3}$ y $c = a - \frac{a}{3}$.

Tomando $a = 3$ tenemos el triángulo de lados $2, 3$ y 4.

■