

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 910. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, Ejercicio 5 del examen de Geometría I de Febrero de 2012, Navarro, J., Universidad de Extremadura) Considérese el plano afín sobre un cuerpo de característica 3. Pruébese que las medianas de un triángulo son rectas paralelas.

Solución:

Si A , B y C son los vértices de un triángulo, como estos tres puntos no están alineados, entonces, los vectores:

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

son linealmente independientes, por lo que tiene sentido considerar el sistema de referencia $\{O = A; \vec{u}, \vec{v}\}$, respecto del cual:

$$\begin{cases} A = (0, 0) \\ B = (1, 0) \\ C = (0, 1) \end{cases}$$

por lo que, si M , N y P son los puntos medios de los lados AB , AC y BC , respectivamente, entonces:

$$\begin{cases} M = (2, 0) \\ N = (0, 2) \\ P = (2, 2) \end{cases}$$

pues, así:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{u} = 2(2\vec{u}) = 2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{v} = 2(2\vec{v}) = 2\overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + \vec{v} = 2(\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\overrightarrow{BP} \end{cases}$$

Por tanto, las tres medianas son paralelas, ya que sus vectores directores son coincidentes:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = 2\vec{u} + 2\vec{v} \\ \overrightarrow{BN} = 2\vec{u} + 2\vec{v} \\ \overrightarrow{CM} = 2\vec{u} + 2\vec{v} \end{cases}$$

y no tienen puntos comunes, porque:

♣ $(1, 0) \notin m_A \equiv (0, 0) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{k} : (0, 0) + \vec{u} = (1, 0) = (0, 0) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{k} : \vec{u} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{k} : \begin{cases} 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2 \\ 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

y se llegaría a una contradicción.

✦ $(0, 1) \notin m_A \equiv (0, 0) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : (0, 0) + \vec{v} = (0, 1) = (0, 0) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : \vec{v} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{K} : \begin{cases} 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2 \end{cases}$$

y se llegaría a una contradicción.

★ $(0, 0) \notin m_B \equiv (1, 0) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : (1, 0) + 2\vec{u} = (0, 0) = (1, 0) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : 2\vec{u} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{K} : \begin{cases} 2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 1 \\ 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}$$

y se llegaría a una contradicción.

★ $(0, 1) \notin m_B \equiv (1, 0) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : (1, 0) + 2\vec{u} + \vec{v} = (0, 1) = (1, 0) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : 2\vec{u} + \vec{v} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{K} : \begin{cases} 2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 1 \\ 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2 \end{cases}$$

y se llegaría a una contradicción.

★ $(0, 0) \notin m_C \equiv (0, 1) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : (0, 1) + 2\vec{v} = (0, 0) = (0, 1) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : 2\vec{v} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{K} : \begin{cases} 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ 2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 1 \end{cases}$$

y se llegaría a una contradicción.

★ $(1, 0) \notin m_C \equiv (0, 1) + \langle 2\vec{u} + 2\vec{v} \rangle$, pues, en caso contrario:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : (0, 1) + \vec{u} + 2\vec{v} = (1, 0) = (0, 1) + 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{K} : \vec{u} + 2\vec{v} = 2\theta\vec{u} + 2\theta\vec{v} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{K} : \begin{cases} 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2 \\ 2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 1 \end{cases}$$

y se llegaría a una contradicción.