

Problema 911

Dados dos triángulos paralelogícos ABC y $A'B'C'$, con P y P' los centros de paralelogía de ABC respecto a $A'B'C'$ y de $A'B'C'$ respecto a ABC , respectivamente. Demostrar que la transformación afín que aplica ABC en $A'B'C'$ lleva P en P' .

Un triángulo ABC es **paralelogíco** respecto otro $A'B'C'$ si las paralelas por A, B y C a los lados de $A'B'C'$ se cortan en un punto, llamado **centro de paralelogía** de ABC respecto a $A'B'C'$. Entonces, se verifica que, recíprocamente, $A'B'C'$ es paralelogíco respecto ABC .

Tomando ABC como triángulo base en una referencia baricéntrica, sean $(p : q : r)$ las coordenadas del centro de paralelogía de $A'B'C'$ respecto a ABC .

El vertice A' ha de estar sobre la paralela a BC por P' , entonces

$$A' = (p(1 + t_a) : q + r : (q + r)t_a),$$

para un cierto valor de t_a .

Similarmente, se obtiene:

$$B' = ((p + r)t_b : q(1 + t_b) : p + r), \quad C' = (p + q : (p + q)t_c : r(1 + t_c)).$$

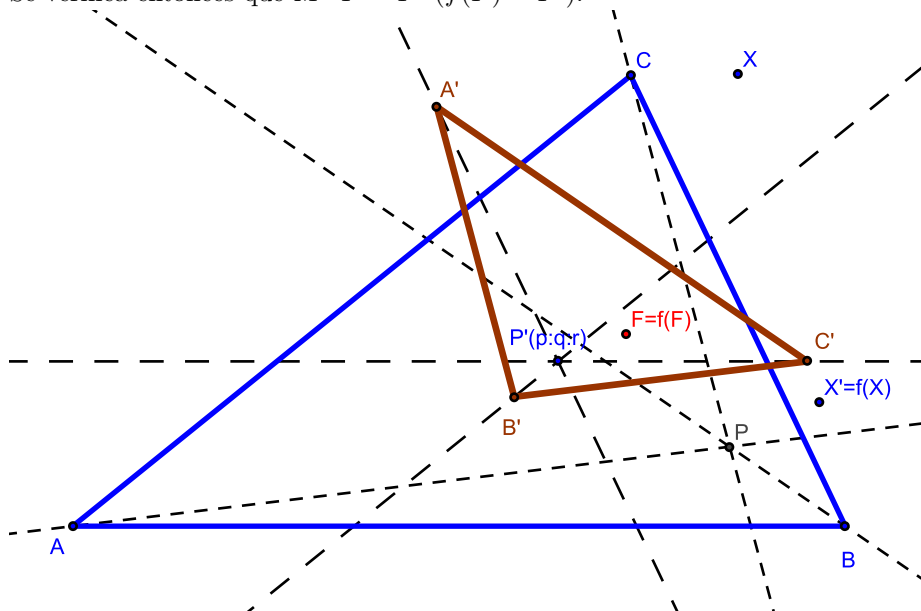
La matriz asociada a la aplicación afín f , que transforma ABC en $A'B'C'$ es:

$$M = \begin{pmatrix} p(t_a + 1)(t_b + 1)(t_c + 1) & (p + r)(t_a + 1)t_b(t_c + 1) & (p + q)(t_a + 1)(t_b + 1) \\ (q + r)(t_b + 1)(t_c + 1) & q(t_a + 1)(t_b + 1)(t_c + 1) & (p + q)(t_a + 1)(t_b + 1)t_c \\ (q + r)t_a(t_b + 1)(t_c + 1) & (p + r)(t_a + 1)(t_c + 1) & r(t_a + 1)(t_b + 1)(t_c + 1) \end{pmatrix}$$

Las paralelas por A, B, C a los lados $B'C', C'A', A'B'$ se cortan en:

$$P = ((1 + t_a)(p - rt_b)(-q + pt_c) : (-r + qt_a)(1 + t_b)(q - pt_c) : (r - qt_a)(-p + rt_b)(1 + t_c)).$$

Se verifica entonces que $M \cdot P = P'$ ($f(P) = P'$).



REFERENCIA:

Translation of the Kimberling's Glossary into barycentrics (Pierre L. Douillet)