

Pr. Cabri 9 I I

Enunciado

Dados dos triángulos paralelogícos ABC y $A'B'C'$, con P y P' los centros de paralelogía de ABC respecto a $A'B'C'$ y de $A'B'C'$ respecto a ABC , respectivamente. Demostrar que la transformación afín que aplica ABC en $A'B'C'$ lleva P en P' .

Un triángulo ABC es paralelogíco respecto otro $A'B'C'$ si las paralelas por A , B y C a los lados de $A'B'C'$ se cortan en un punto, llamado centro de paralelogía de ABC respecto a $A'B'C'$.

Entonces, se verifica que, recíprocamente, $A'B'C'$ es paralelogíco respecto ABC .

Montesdeoca, A. (2019).

Solución

de César Beade Franco

I. Recordemos que la incidencia y el paralelismo se conservan por cualquier transformación afín. Además siempre existe una transformación afín que transforma cualquier triángulo en otro dado.

II. Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ paralelogícos (PLL). Cualesquiera dos triángulos, uno de lados paralelos al ABC y otro al $A'B'C'$ son PLL. Estos triángulos se obtienen a partir de los iniciales mediante homotecias y traslaciones.

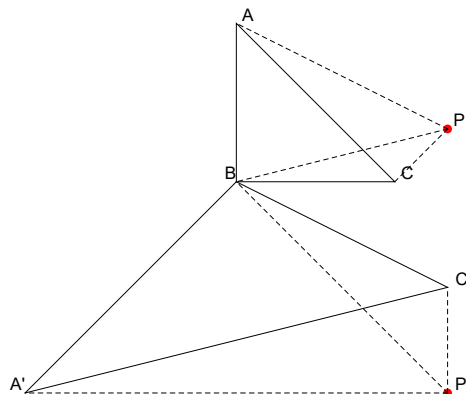
III. Nos bastará resolver el problema para un triángulo cualquiera de cada una de las familias.

IV. Tomemos ABC como $A(0,1)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$.

Pasemos a obtener uno de estos triángulos $A'B'C'$ a partir de ABC y $P(p,q)$.

Hagamos $B=B'=(0,0)$, trazamos por él dos líneas paralelas a PA y PC y la cortamos por una transversal paralela a PB que nos proporciona los otros vértices C' y A' , respectivamente. Las rectas $B'A'$, $B'C'$ y $A'C'$ tienen ecuaciones $y = \frac{q}{p-1}x$, $y = \frac{(q-1)x}{p}$, $y = -\frac{qx}{p} - t$, donde al variar t obtenemos diferentes triángulos y como nos vale cualquier triángulo tomamos $t=1$.

Así obtenemos $A' = (-\frac{(-1+p)p}{q}, -p)$ y $C' = (p, -1+q)$. Trazamos por A' una paralela a BC , por B' una a CA y por C' otra a AB . Estas tres rectas se cortan en $P'(p, -p)$.



V. La transformación afín que lleva ABC a A'B'C' tiene como matriz (ampliada)

$$M = \begin{pmatrix} p & -1+q & 0 \\ -\frac{(-1+p)p}{q} & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que $(p,q,1).M=(p,-p,1)$, es decir el transformado de P es P'.