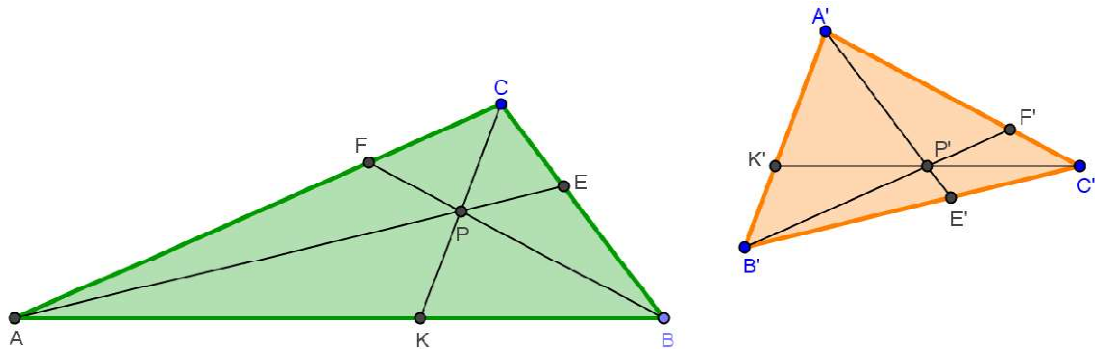


Problema 911.- Dados dos triángulos paralelogramos ABC y $A'B'C'$, con P y P' los centros de paralelogramo de ABC respecto a $A'B'C'$ y de $A'B'C'$ respecto a ABC , respectivamente. Demostrar que la transformación afín que aplica ABC en $A'B'C'$ lleva P en P' .

Un triángulo ABC es paralelogramo respecto otro $A'B'C'$ si las paralelas por A, B y C a los lados de $A'B'C'$ se cortan en un punto, llamado centro de paralelogramo de ABC respecto a $A'B'C'$. Entonces, se verifica que, recíprocamente, $A'B'C'$ es paralelogramo respecto ABC .

Montesdeoca, A. (2019): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son *paralelogramos* tenemos que considerar, junto al triángulo ABC , un punto P en el que concurren las cevianas trazadas desde sus vértices.

Los lados de $A'B'C'$ son paralelos a estas cevianas.

Para construir $A'B'C'$ se toma el punto A' en posición arbitraria: se trazan por él las paralelas a CP y a BP . Sobre la primera (o la segunda, es indiferente) se toma un punto B' (o C'). La paralela a AP por B' determina C' y completa la construcción del triángulo.

La afinidad que transforma el primer triángulo en el segundo tiene la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en la que $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ son las coordenadas afines de A' en la referencia $\mathfrak{R} = \{A; B, C\}$ y las dos columnas de la matriz 2×2 son las coordenadas, en esa misma referencia, de los vectores $A'B'$ y $A'C'$. También tenemos P con coordenadas $P = (u, v)$ (con $uv \neq 0$ y $u + v \neq 1$ para evitar que P esté situado sobre los lados de ABC).

Vamos a imponer las condiciones de *paralelogramo* a esos dos triángulos.

1) El vector $CP = (u, v - 1)$ tiene coordenadas proporcionales al vector $A'B'$, por tanto

$$A'B' = \alpha(u, v - 1)$$

2) Del mismo modo BP y $A'C'$ son linealmente dependiente, esto es,

$$A'C' = \beta(u - 1, v),$$

3) al igual que $C'B' = A'B' - A'C'$ y $AP = (u, v)$, por ello

$$(\alpha u - \beta(u-1), \alpha(v-1) - \beta v) = \gamma(u, v)$$

La matriz de esa afinidad se puede poner como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u & \beta(u-1) \\ \alpha(v-1) & \beta v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Usando la tercera relación podemos escribir $\begin{cases} (\alpha - \beta)u - \gamma u = -\beta \\ (\alpha - \beta)v - \gamma v = \alpha \end{cases}$ de donde se deduce la relación $\alpha u + \beta v = 0$, que es de capital importancia, pues indica que **la transformación de paralelogía es involutiva**. Con todo esto ya podemos poner

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \alpha u \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-u}{v} \\ \frac{v-1}{u} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El transformado del punto $P(u, v)$ se obtiene a partir de ahí: $P' = AP' = AA' + A'P'$ y las coordenadas de $A'P'$ son

$$A'P' = \alpha u \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-u}{v} \\ \frac{v-1}{u} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \alpha u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se deduce de inmediato que la recta $A'P'$ tiene la dirección del vector $\overrightarrow{CB} = (1, -1)$.

En P' es donde deben concurrir las paralelas a los lados AB , BC y CA por los puntos C , A y B respectivamente.

$$C'P' = A'P' - A'C' = \alpha u(1, -1) + \alpha u \left(\frac{u-1}{v}, 1 \right) = \frac{\alpha u}{v}(u+v-1, 0)$$

que indica que $C'P'$ es paralela al vector $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$.

$$\text{Por último de } B'P' = A'P' - A'B' = \alpha u(1, -1) - \alpha u \left(1, \frac{v-1}{u} \right) = (0, \alpha(1-u-v))$$

que expresa que $B'P'$ es paralela a $\overrightarrow{AC}$ y con esto terminamos.

■