Pr. Cabri 912

Enunciado

El pañuelo triangular.
Os queda un pedazo de seda triangular y queréis dividirlo en dos pedazos de áreas absolutamente idénticas para recompensar a dos empleados que más lo merecen. Para ahorrar esfuerzo, queréis que la línea divisoria sea lo más corta posible
A)¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) de la línea divisoria si el triángulo es equilátero?
B)¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) si el triángulo es rectángulo isósceles?
C) ¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) si es cualquier triángulo?

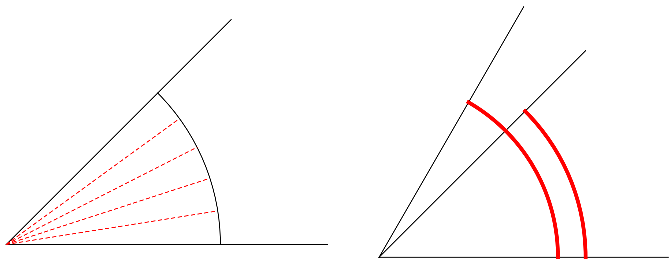
Propuesto por César Beade Franco, profesor de matemáticas jubilado de Cee (La Coruña).
Busser, E. y Cohen, G. (2001), Buscar, jugar, encontrar. 1. Cuando la avaricia se convierte en juego.(221, p. 82) (levemente modificado por el proponente).

Solución

de César Beade Franco

I. Como consecuencia del teorema isoperimétrico, para una área determinada, la figura de menor perímetro es la circunferencia.
Esto es válido también para un “sector”. La línea más corta entre dos rectas convergentes que limita con estas una región de área dada es un arco de círculo.
Si así no fuera podemos imaginar el “sector” dividido en otros iguales y tan pequeños como deseásemos. Estos nos proporcionarían una superficie igual (tan próxima como se quiera) al círculo y de menor perímetro.

II. Además, para un área determinada, si las rectas están más separadas el arco de círculo será mayor (y el radio menor).



Apartado C

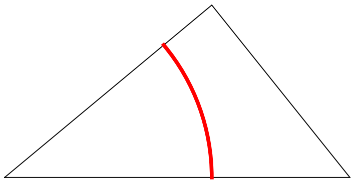
III. Así pues, para un triángulo cualquiera, la línea de menor longitud será el arco de círculo trazado entre los lados mayores con centro en el vértice que estos determiman y de modo que encierre un área igual a la mitad de la del triángulo.

IV. Sea un triángulo de vértices A(0,0), B(1,0) y C(a,b) y tal que A es el ángulo menor que medirá ArcTg($\frac{b}{a}$).

Para determinar el radio R resolvemos la ecuación $\pi R^2 \frac{\mathrm{ArcTg}\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} = \frac{b}{4}$ y obtenemos

R= $\sqrt{\frac{b}{2\,\mathrm{ArcTg}\left(\frac{b}{a}\right)}}$,no construíble por métodos euclídeos.

La longitud del arco será L= $\mathrm{ArcTg}\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{b}{2\,\mathrm{ArcTg}\left(\frac{b}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{b\mathrm{ArcTg}\left(\frac{b}{a}\right)}{2}}$.



Apartado A

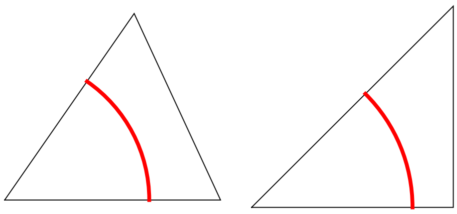
V. Consideremos el triángulo eqilátero de lado 1, C=($\frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$). En este caso es evidente que hay 3 arcos solución.

Aquí L= $\frac{\sqrt{\pi}}{2.3^{1/4}}$ y R= $\frac{3^{3/4}}{2\sqrt{\pi}}$.

Apartado B

VI. Consideremos el triángulo rectángulo isósceles de catetos 1, C=(1,1). Ahora hay 2 arcos solución, entre un cateto y la hipotenusa y las longitudes anteriores quedan

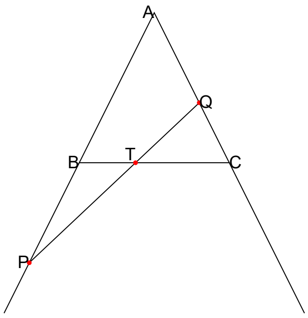
L= $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ y R= $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.



Apéndice

VII. Nos podríamos preguntar por el segmento de menor longitud que biseque un triángulo.

De nuevo ha de ser trazado entre los lados mayores y se puede demostrar analíticamente que dicho segmento ha de determinar un triángulo isósceles con dichos lados.



VIII. Consideremos el punto A(0,a) y tracemos por A dos rectas que pasen por los puntos B = (-1, 0) y C = (1, 0) respectivamente.

El triángulo isósceles ABC tiene área a.

Cortamos las rectas AB y AC por una transversal que pasa por T(-t,0) con pendiente m, que las corta en PQ, con P ∊ AB y q ∊ AC y tal que (ABC) = (APQ). Demostraremos que la longitud de PQ es mayor que BC.

De la condición (ABC)=(APQ) deducimos que $m = \frac{2\,a\,t}{1+t^2}$. los puntos de corte son

P=($-\frac{a-m\,t}{a-m}$, $\frac{a\,(-m+m\,t)}{a-m}$) y Q=($-\frac{-a+m\,t}{a+m}$, $\frac{a\,(m+m\,t)}{a+m}$).

Nos falta comprobar que $|PQ| \geqslant 2$, que equivale a resolver la inecuación

$2\sqrt{\frac{1+\left(2+4\,a^2\right)\,t^2+t^4}{\left(-1+t^2\right)^2}} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1+\left(2+4\,a^2\right)\,t^2+t^4}{\left(-1+t^2\right)^2} \geqslant 1$ que operando resulta $\frac{4\,\left(1+a^2\right)\,t^2}{\left(-1+t^2\right)^2} \geq 0$, que se cumple siempre.