Problema 912

El pañuelo triangular.

Os queda un pedazo de seda triangular y queréis dividirlo en dos pedazos de áreas absolutamente idénticas para recompensar a dos empleados que más lo merecen. Para ahorrar esfuerzo, queréis que la línea divisoria sea lo más corta posible

A)¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) de la línea divisoria si el triángulo es equilátero?

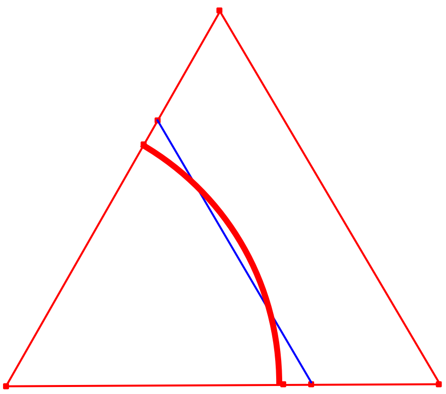
B)¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) si el triángulo es rectángulo isósceles?

C) ¿Cuál es la longitud (y la forma o dibujo) si es cualquier triángulo?

Solución
Dados los triángulos de área S conocida y ángulo A conocido.
2
Nota 2:
Dado un triángulo isósceles de ángulo desigual A y área S y un sector circular de área S y ángulo A, se tiene que el lado a es mayor que el arco del sector circular.

a)
Consideramos el triángulo equilátero de lado a.

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



El área del sector circular es igual a la mitad del área del triángulo:

$$\frac{1}{6}\pi R^2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Resolviendo la ecuación en R:

$$R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}a^2$$

$$R = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}a$$

La longitud del arco es:

$$L = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}a \approx 0.6734a$$

b)
Sea el triángulo ABC, A=90º rectángulo isósceles de catetos b

$S_{ABC} = \frac{1}{2}b^2$

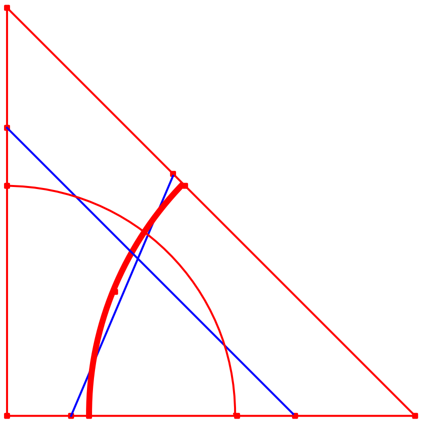
El área del sector circular de centro B y 45º es igual a la mitad del
área del triángulo:

$\frac{1}{8}\pi R^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}b^2$

Resolviendo la ecuación en R:

$R^2 = \frac{2}{\pi}b^2$

$R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}b$



La longitud del arco es:

$L = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}b \approx 0.6267b$

c)

Sea el triángulo ABC, tal que $B \leq A, C$, en radianes

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \cdot sinB$$

El área del sector circular de centro B es igual a la mitad del área del triángulo:

$$R_B{}^2 \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} ac \cdot sinB$$

El área del sector circular de centro C es igual a la mitad del área del triángulo:

$$R_c{}^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} ac \cdot sinB$$

Entonces, $R_B{}^2 B = R_C{}^2 C$

$$R_C = R_B \cdot \sqrt{\frac{B}{C}}$$

La longitud del arco de centro B es:

$$L_B = R_B \cdot B$$

La longitud del arco de centro C es:

$$L_C = R_C \cdot C$$

$$L_C = R_C \cdot C = R_B \sqrt{\frac{B}{C}} C \geq L_B$$

Análogamente,

$$L_A \geq L_B$$

La longitud del arco menor corresponde a la del ángulo menor B.

$$R_B{}^2 = \frac{ac \cdot sinB}{2B}$$

$$R_B = \sqrt{\frac{ac \cdot sinB}{2B}}$$

La longitud del arco es:

$$L_B = R_B \cdot B = \sqrt{\frac{B \cdot ac \cdot sinB}{2}}$$