Pr. Cabri 913

Enunciado

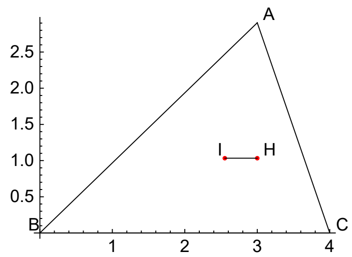
a) Dado el triángulo BC=4, AB=sqrt(17.43584), AC=sqrt(9.43584),
comprobar que la recta HI (ortocentro, incentro), es paralela al lado BC.
b) Construir un triángulo ABC tal que HI sea paralela a BC, y d(HI)=(1/8)(a) (Nota. De esta construcción sólo dispongo de una aproximación a través de geometría dinámica.)
Barroso, R.(2019).

Solución

por César Beade Franco

Apartado A

Un triángulo con esas medidas es A(3,2.90445), B(0,0) y C(4,0).
Su ortocentro es el punto H(3,1.0329) y su incentro I(2.55192,1.03293), donde observamos que HI es paralela al lado BC.



Apartado B

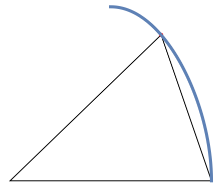
Consideremos un triángulo (1) de vértices A(eh, $\sqrt{(1+e^2)(1-h^2)}$), B(-1,0) y C(1,0).

Para este triángulo H=($e\,h$, $-\frac{(-1+e\,h)(1+e\,h)}{\sqrt{-(-1+e^2)(-1+h^2)}}$) e I=($h$, $\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$), donde las ordenadas indican la distancia de estos puntos al lado BC y han de coincidir si HI es paralela a BC.

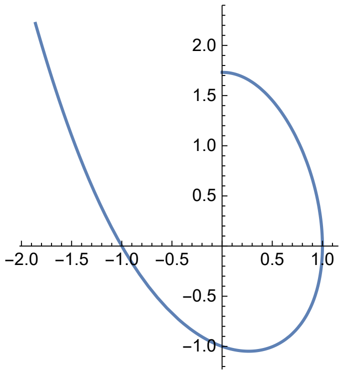
Resovemos para h $-\frac{(-1+e\,h)(1+e\,h)}{\sqrt{-(-1+e^2)(-1+h^2)}}=\frac{\sqrt{(-1+e^2)(1-h^2)}}{1+e}$, obteniendo h=$\frac{\sqrt{2+e-e^2}}{\sqrt{1+e^3}}$. Así pues

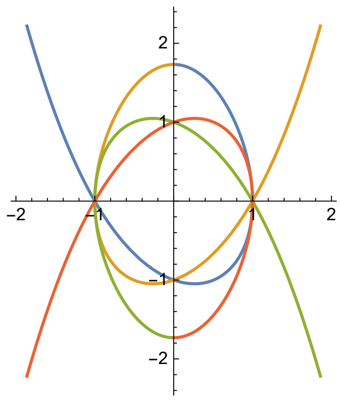
A=($\frac{\sqrt{2-e}\;e}{\sqrt{1-e+e^2}}$, $\frac{-1+e^2}{\sqrt{1-e+e^2}}$).

Esta expresión de A, puede considerarse la ecuación paramétrica del lugar geométrico que recorre A, con la restricción $1\leqslant e\leqslant 2$. En el siguiente dibujo lo observamos junto con el triángulo (uno semejante) del apartado anterior (2).



Sin esa restricción el lugar queda



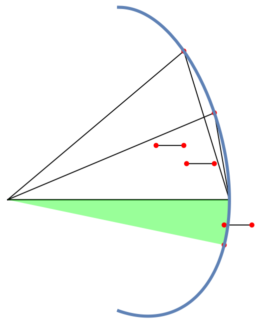


Observamos que por simetría podemos obtener 4 de esos lugares.
Los triángulos con A situado fuera del primer cuadrante tienen alineados H y otros incentros, como veremos.

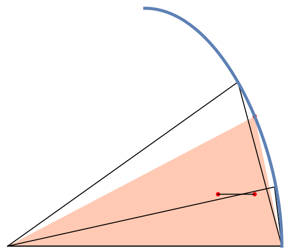
Pasemos a obtener los triángulos tales que d(HI)=($\frac{1}{8}$)(a), en nuestro caso d(HI)=$\frac{1}{4}$ pues a=2.

Ya calculamos H=($\frac{\sqrt{2-e}\ e}{\sqrt{1-e+e^2}}$, $\frac{-1+e}{\sqrt{1-e+e^2}}$) e I=($\frac{\sqrt{2-e}}{\sqrt{1-e+e^2}}$, $\frac{-1+e}{\sqrt{1-e+e^2}}$).

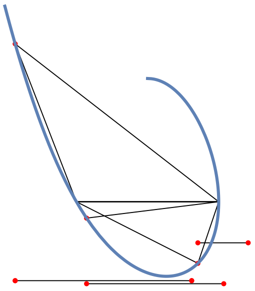
Nos basta resolver la ecuación $\frac{\sqrt{2-e}\ e}{\sqrt{1-e+e^2}}-\frac{\sqrt{2-e}}{\sqrt{1-e+e^2}}=\frac{1}{4}$ que equivale a la cúbica $-31+79\,e-63\,e^2+16\,e^3=0$, que nos da como soluciones aproximadas {1.7381, 1.4073, 0.792101}, donde solo las dos primeras responden a este apartado.
A continuación vemos el dibujo de estos triángulos.



Será curioso imponer la condición d(HI)=$\frac{1}{2\sqrt{14}}$BC. En este caso d(HI)=$\frac{1}{\sqrt{14}}$, obteniendo una solución e=$\frac{3}{2}$, que nos proporciona el triángulo de vértices A($\frac{3}{\sqrt{14}}$, $\frac{5}{2\sqrt{7}}$), B(-1,0) y C(1,0), construíble.
Hay otras dos soluciones para e={$\frac{1}{14}\left(17-\sqrt{37}\right)$, $\frac{1}{14}\left(17+\sqrt{37}\right)$}.



Finalmente, algunos triángulos con alineación del ortocentro y exincentros.



Notas

(1) Un EH-triángulo. Ver, por ejemplo los problemas 689 u 897 de esta página donde se explica el significado de e y h.

(2) Eliminando el parámetro obtenemos su ecuación implícita, de grado 8.

$$x^2\,(-12 + 18\,x^2 - 12\,x^4 + 3\,x^6 + 17\,y^2 - 13\,x^2\,y^2 + 3\,x^4\,y^2 - 6\,y^4 + x^2\,y^4) = (-1 + y)^2\,(1 + y)^2\,(-3 + y^2)$$