Problema 913

a) Dado el triángulo BC=4, AB=sqrt(17.43584), AC=sqrt(9.43584),

comprobar que la recta HI (ortocentro, incentro), es paralela al lado BC.

b) Construir un triángulo ABC tal que HI sea paralela a BC, y d(HI)=(1/8)(a) (Nota. De esta construcción sólo dispongo de una aproximación a través de geometría dinámica.)

Barroso, R.(2019): Comunicación personal.

a) Tomemos el origen de coordenadas en B (0,0). Será C(4,0)

Tomemos el pie de la altura del vértice A en $H_a(3,0)$.

Será A(3,t). La recta AC es $\frac{y-t}{0-t} = \frac{x-3}{4-3}$

La recta BH_b será y== $\frac{1}{t}x$

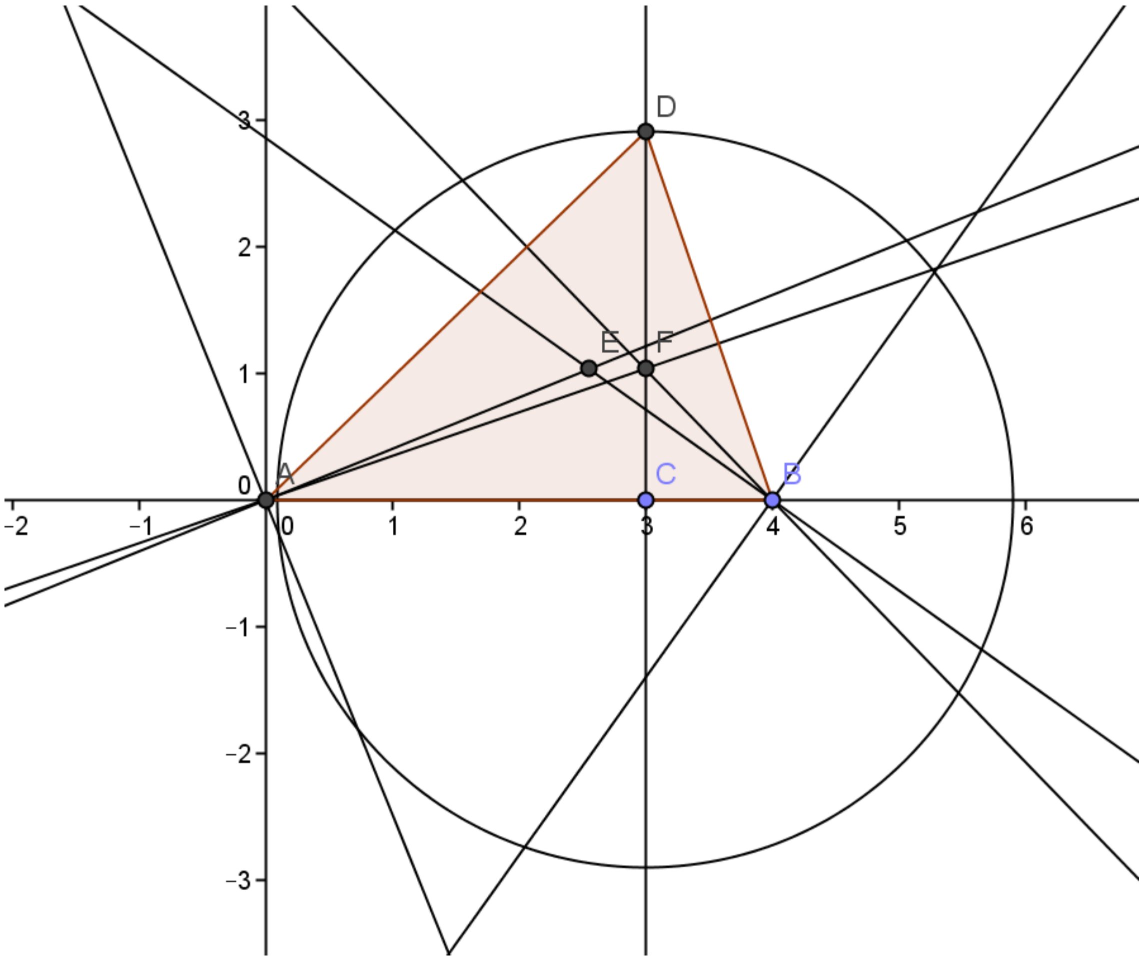
Así el ortocentro H(3, 3/t)

El inradio habrá de ser 3/t

Así tendremos

$$\frac{3}{t}\left(4 + \sqrt{9+t^2} + \sqrt{1+ t^2}\right) = 4\,t$$

Ecuación cuya solución según https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=148b5e39237cc2678c3cab6b524c3484 es t = 2.9044



B)Tomemos a=8, b y c.

Así lo pedido es que sea HI=1.

Tenemos que $AI = \frac{b+c}{8+b+c} AW_a = \frac{b+c}{8+b+c} \sqrt{bc(1 - \frac{64}{(b+c)^2}}$

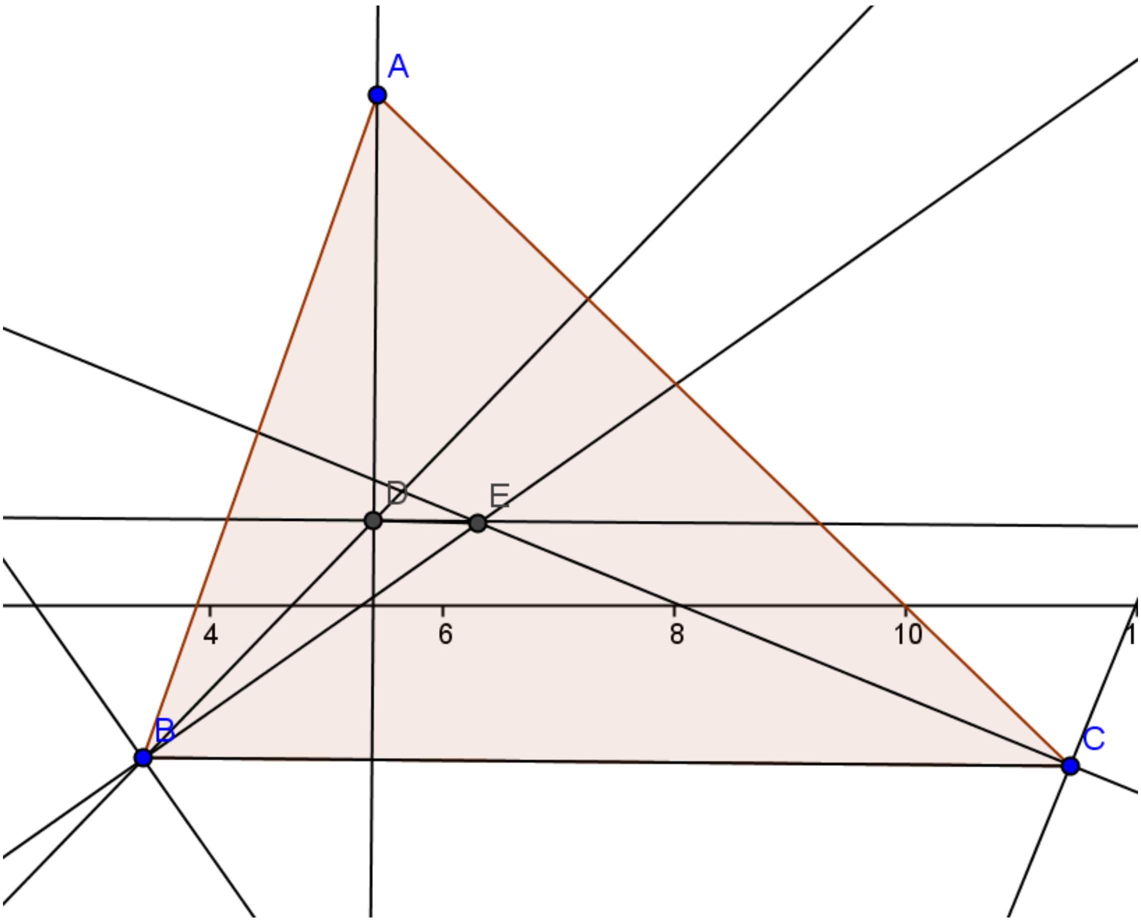
Luego $AI^2 = bc \frac{c^2+b^2+2bc-64}{(8+b+c)^2}$

Por otra parte, $AH = \frac{AH_b}{sen\,\gamma} = \frac{c\cos\alpha}{sen\,\gamma} = \frac{c\frac{b^2+c^2-64}{2bc}}{\sqrt{1-cos^2\gamma}} = \frac{\frac{b^2+c^2-64}{2b}}{\sqrt{1-(\frac{b^2-c^2+64}{16b})^2}}$

Así, $AH^2 = \frac{(\frac{b^2+c^2-64}{2b})^2}{1-(\frac{b^2-c^2+64}{16b})^2}$

Luego se trata de que $\frac{(\frac{b^2+c^2-64}{2b})^2}{1-(\frac{b^2-c^2+64}{16b})^2} + 1 = bc \frac{c^2+b^2+2bc-64}{(8+b+c)^2}$.

Esta ecuación la aproximo por arrastre con los valores b= 8.3309 c=6.0734



A
D
E
4
6
8
10
B
C