Problema 913 de *triánguloscabri*. (a) *Dado el triángulo ABC con $BC = 4$, $AB = \sqrt{17{,}43584}$, $AC = \sqrt{9{,}43584}$, comprobar que la recta HI (ortocentro, incentro), es paralela al lado BC. (b) Construir un triángulo ABC tal que HI sea paralela a BC, y $HI = \frac{1}{8}a$ (Nota. De esta construcción sólo dispongo de una aproximación a través de geometría dinámica.)*

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Usando coordenadas baricéntricas y siendo $H = (S_BS_C : S_CS_A : S_B)$, $I = (a : b : c)$, para que la recta HI contenga a $(0 : -1 : 1)$, punto del infinito de la recta BC, debe cumplirse

$$\begin{vmatrix} S_BS_C & S_CS_A & S_AS_B \\ a & b & c \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

que conduce a la relación

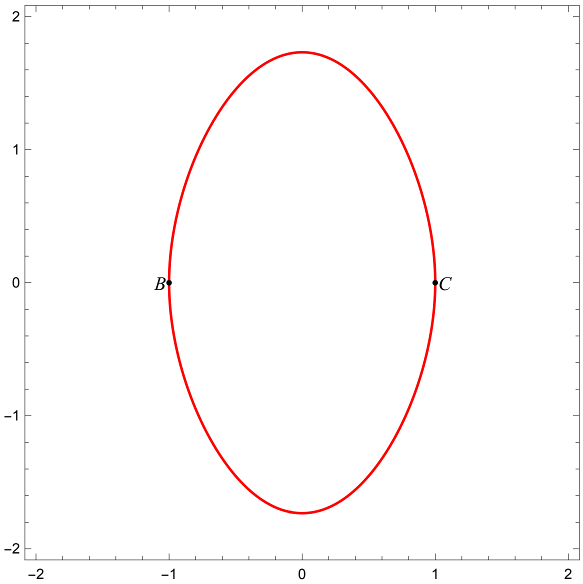
$$(1)\quad 2a^4 - (b+c)a^3 - (b-c)^2a^2 + (b-c)^2(b+c)a - (b-c)^2(b+c)^2 = 0.$$

Al sustituir los valores propuestos de b y c propuestos obtenemos aproximadamente $a = 4{,}00005$, lo cual confirma la afirmación del apartado (a).

Para tener una idea general de los triángulos ABC que cumplen (1) fijamos los vértices $B = (-\frac{a}{2}, 0)$, $C = (-\frac{a}{2}, 0)$ y dejamos variar $A = (x, y)$ con las condiciones

$$\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right) + y^2} = b, \quad \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right) + y^2} = c,$$

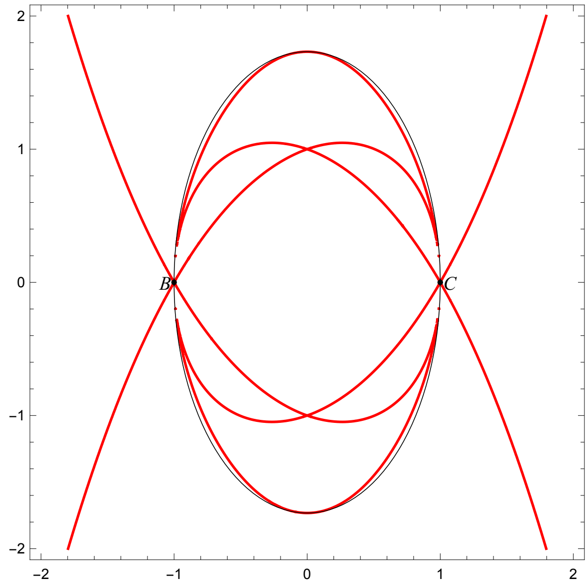
obteniéndose una curva xy con una gráfica muy parecida a una elipse, como muestra la siguiente figura para $a = 2$:



La curva definitivamente no es una elipse, ya que si elminamos b y c pero sin considerar las raíces cuadradas, es decir usando las relaciones

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) + y^2 = b^2, \quad \left(x + \frac{a}{2}\right) + y^2 = c^2,$$

vemos que la pretendida elipse no es sino parte de una curva de grado superior:



En esta figura hemos trazado la elipse con diámetro menor BC y con vértices los puntos correspondientes al triángulo equilátero, es decir $(0, \frac{a}{2}\sqrt{3})$.

La ecuación de esta curva es: $3a^8 - 48a^6x^2 + 288a^4x^4 - 768a^2x^6 + 768x^8 - 28a^6y^2 + 272a^4x^2y^2 - 832a^2x^4y^2 + 768x^6y^2 + 80a^4y^4 - 384a^2x^2y^4 + 256x^4y^4 - 64a^2y^6 = 0$.

Para responder al apartado (b) usamos la fórmula de la distancia $HI = 3r^2 + 4rR + 4R^2 - p^2$. Al hacer $HI = \frac{a}{8}$ se obtiene una expresión descomunal: $-65a^6 + 64a^5b + 66a^4b^2 - 128a^3b^3 + 63a^2b^4 + 64ab^5 - 64b^6 + 64a^5c - 192a^4bc + 128a^3b^2c + 128a^2b^3c - 192ab^4c + 64b^5c + 66a^4c^2 + 128a^3bc^2 - 382a^2b^2c^2 + 128ab^3c^2 + 64b^4c^2 - 128a^3c^3 + 128a^2bc^3 + 128ab^2c^3 - 128b^3c^3 + 63a^2c^4 - 192abc^4 + 64b^2c^4 + 64ac^5 + 64bc^5 - 64c^6 = 0$, que junto con (1) podemos usar para hallar una solución aproximada para un valor dado de a. Por ejemplo, para $a = 4$ con $b > c$ se obtienen $b = 4{,}0422$, $c = 1{,}58699$ y $b = 4{,}15362$, $c = 2{,}79879$.