

Problema 914.-

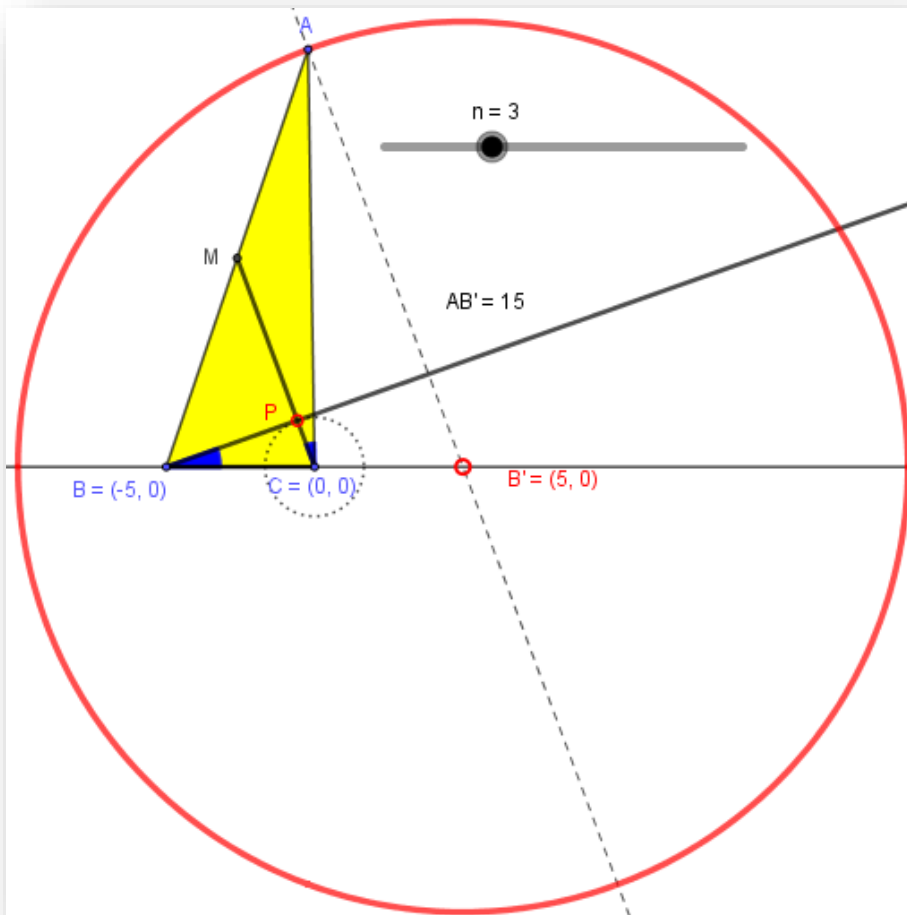
Para cada triángulo ABC, se considera el punto $P = m_c \cap l$, siendo m_c la mediana correspondiente al vértice C y l la recta que pasa por el punto B y tal que $\angle(AC, m_c) = \angle(BC, l)$.
Dados un segmento BC y un entero positivo n , determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando el punto P correspondiente al triángulo ABC verifica que $(CP/CB) = (1/n)$

Pérez, M. A. (2019): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

El lugar geométrico deseado no es otro que la circunferencia de ecuación $(x - m)^2 + y^2 = (mn)^2$, siendo $m = \overline{BC}$.

Para probar esta afirmación usamos la Geometría de Coordenadas.



Sea el sistema de referencia determinado por el punto C como origen de coordenadas y la recta BC como eje de abscisas. El eje de ordenadas será pues, la recta perpendicular a BC por el punto C .

En este sistema de referencia, las coordenadas de los puntos notables serán $B = (-m, 0)$, $C = (0, 0)$. Por tanto, el segmento $\overline{BC} = m$. Sean además $\angle PBC = \angle PCA = \alpha$; $\angle BPC = \beta$.

Se tendrá así que $\sin \beta = n \sin \alpha$. Por fin, sea el punto $P = (\frac{m}{n} \cos(\alpha + \beta), \frac{m}{n} \sin(\alpha + \beta))$
Así la ecuación de la recta $AC \equiv y = \tan \beta \cdot x$

El punto B' , simétrico de B respecto de C tiene de coordenadas $B' = (m, 0)$.

Por tanto, la recta $B'A$, paralela a la recta CM será la de ecuación $y = \tan(\alpha + \beta) \cdot (x - m)$

En definitiva A, será el punto de intersección de las rectas AC y AB' .

$$A \equiv \begin{cases} y = \tan \beta \cdot x \\ y = \tan(\alpha + \beta) \cdot (x - m) \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\tan^2 \beta = \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{n^2 \sin^2 \alpha}{1 - n^2 \sin^2 \alpha} = \frac{n^2 \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1 - n^2 \tan^2 \alpha} = \frac{n^2 \tan^2 \alpha}{1 + (1 - n^2) \tan^2 \alpha} = \frac{y^2}{x^2}.$$

Por tanto,

$$x^2 n^2 \tan^2 \alpha = (1 + (1 - n^2) \tan^2 \alpha) y^2 \rightarrow ((n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2) \tan^2 \alpha = y^2 \rightarrow$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{y^2}{((n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2)} \rightarrow \tan \alpha = \frac{y}{\sqrt{(n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2}}$$

Prescindimos del signo $\pm$ porque luego elevaremos al cuadrado (*).

Para que sea más operativo el desarrollo algebraico, llamaremos

$$t = \tan \alpha = \frac{y}{\sqrt{(n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2}}$$

Como tenemos que:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{t + \frac{y}{x}}{1 - t \cdot \frac{y}{x}} = \frac{tx + y}{x - ty} = \frac{y}{x - m}$$

$$(tx + y)(x - m) = y(x - ty); \quad tx^2 - mtx + xy - my = xy - ty^2$$

$$tx^2 - mtx + ty^2 = my; \quad t(x^2 + y^2 - mx) = my. \text{ Sustituyendo, por fin,}$$

$$\frac{y}{\sqrt{(n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2}} (x^2 + y^2 - mx) = my \rightarrow (x^2 + y^2 - mx) = m \sqrt{(n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2}$$

$$(*) \text{ Elevamos al cuadrado, } (x^2 + y^2 - mx)^2 = m^2 ((n^2 - 1) y^2 + n^2 x^2);$$

$$(x^2 + y^2 - mx)^2 = m^2 ((n^2 - 1) y^2 + (n^2 - 1) x^2 + x^2);$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2mx(x^2 + y^2) + m^2 x^2 = m^2 ((n^2 - 1) y^2 + (n^2 - 1) x^2 + x^2);$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2mx(x^2 + y^2) - m^2 ((n^2 - 1) y^2 - (n^2 - 1) x^2) = 0;$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2mx - m^2(n^2 - 1)) = 0; \quad (x - m)^2 + y^2 - m^2 n^2 = 0 \rightarrow$$

$$(x - m)^2 + y^2 = (mn)^2;$$

Ecuación de la circunferencia de centro $B' = (m, 0)$ y Radio $= mn$, *cqd.* ■