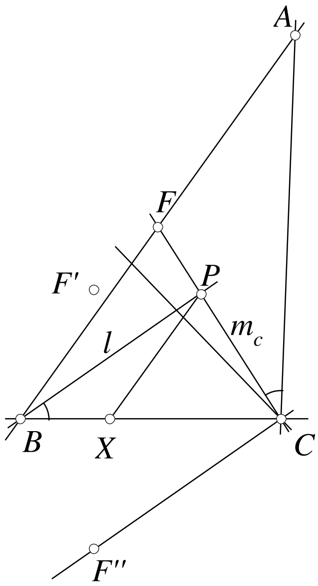
Problema 914 de *triánguloscabri*. *Para cada triángulo ABC, se considera el punto $P = m_c \cap l$ siendo m_c la mediana correspondiente al vértice C y l la recta que pasa por el punto B y tal que $\angle(AC, m_c) = \angle(BC, \ell)$.*

Dados un segmento BC y un entero positivo n, determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando el punto P correspondiente al triángulo ABC verifica que $CP : CB = \frac{1}{n}$.

Propuesto por Miguel Ángel Pérez García-Ortega.

Solución de Francisco Javier García Capitán. En primer lugar, damos una construcción de las rectas que intervienen en el problema:



- Si F es el punto medio de AB, la recta m_c se obtiene uniendo C con F.
- Hallamos el punto simétrico F' de F respecto de m_c y luego el punto F'' simétrico de F' respecto de la recta BC. La recta ℓ es la paralela por B a CF''.

Usando coordenadas baricéntricas, la mediana m_c tiene ecuación $x = y$. Por otro lado, tenemos el punto $F = (1 : 1 : 0)$, y a partir de él calculamos los puntos

$$F' = \left(a^2 : b^2 : (a-b)^2\right),$$
$$F'' = \left(a^2 : a^2 + 2b^2 - c^2 : 2ab - 2b^2 + c^2\right),$$

y así obtenemos la ecuación de la recta $l : (2b^2 - c^2)x^2 - a^2 z = 0$, cortándose en el punto $P = (a^2 : a^2 : 2b^2 - c^2)$.

Ahora vamos a hacer uso de dos lemas:

1. La longitud de la mediana CF es $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.
2. Si X es un punto que divide al segmento BC en la razón $m : n$ entonces el punto X tiene coordenadas $X = (0 : n : m)$ y los segmentos BX y XC tienen longitudes

$$BX = \frac{ma}{m+n}, XC = \frac{na}{m+n}.$$

De esta forma podemos evitar la fórmula de la distancia con coordenadas baricéntricas. Para ello, trazamos una paralela por P a AB, que corta a BC en el punto $X = (0 : 2a^2 : 2b^2 - c^2)$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{CP}{CX} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CP = \frac{CX}{CB} \cdot CF &= \frac{2a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}.\end{aligned}$$

A partir de aquí, $CP : CB = \frac{1}{n} \Leftrightarrow a^2n^2 - 2a^2 - 2b^2 + c^2 = 0$.

Ahora, fijando $B = (-\frac{a}{2}, 0)$, $C = (\frac{a}{2}, 0)$ y dejando variar $A = (x, y)$, el punto A cumple la ecuación

$$4x^2 + 4y^2 - 12ax + 9a^2 - 4a^2n^2 = 0,$$

una circunferencia con centro $B' = (\frac{3a}{2}, 0)$ y radio na, es decir, una circunferencia con centro el punto simétrico B' de B respecto de C y de radio n veces la longitud del segmento BC.