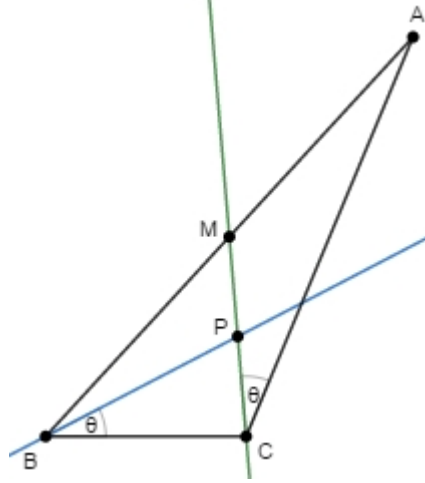


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 914. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Para cada triángulo ABC , se considera el punto $P = m_C \cap l$, siendo m_C la mediana correspondiente al vértice C y l la recta que pasa por el punto B y tal que $\angle(AC, m_C) = \angle(BC, l)$:



Dados un segmento BC y un entero positivo n , determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando el punto P correspondiente al triángulo ABC verifica que:

$$\frac{CP}{CB} = \frac{1}{n}$$

Solución:

Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$m_C \equiv x - y = 0$$

entonces:

$$l \equiv (2b^2 - c^2)x - a^2z = 0$$

por lo que:

$$P = m_C \cap l = (a^2 : a^2 : 2b^2 - c^2) = \left(\frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} : \frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} : \frac{2b^2 - c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right)$$

luego:

$$\frac{CF^2}{CB^2} = \frac{S_A \left(\frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right)^2 + S_B \left(\frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \right)^2 + S_C \left(\frac{2b^2 - c^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} - 1 \right)^2}{a^2} = \frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

e imponiendo la condición del enunciado, resulta que:

$$0 = \frac{a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{(n^2 - 2)a^2 - 2b^2 + c^2}{n^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)} \Rightarrow (n^2 - 2)a^2 - 2b^2 + c^2 = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio O del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC , si $A = (x, y)$ ($y \neq 0$), como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

resulta que:

$$0 = (n^2 - 2)a^2 - 2b^2 + c^2$$

$$0 = x^2 - 6x + y^2 + 9 - 4n^2$$

por lo que el punto A debe estar situado sobre la circunferencia de ecuación:

$$(x-3)^2 + y^2 = (2n)^2$$

es decir, debe estar situado sobre la circunferencia centrada en el punto B' simétrico del punto B respecto del punto C y cuyo radio es igual a nBC , de la cual hay que eliminar el punto B y su punto diametralmente opuesto, ya que, para dichos puntos no tendríamos un triángulo.

