Pr. Cabri 915

Enunciado

Sea un segmento BD cuyo punto medio es C. Considere un punto cualquiera M en el círculo del centro B y radio BD.
La mediatriz del segmento CM corta la recta BM en el punto A.
Sean G el baricentro, I el centro del círculo inscrito, O el centro del círculo circunscritodel triángulo ABC.
Sean P el punto de intersección de la recta AI con la recta BC, Q y R los puntos medios de los lados AB y AC.
Q1. Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC.
Q2. Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI.
Q3. Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el circulo inscrito del triangulo ABC son concéntricos.

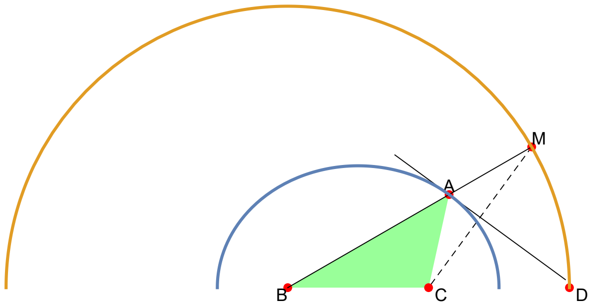
Propuesto por Philippe Fondanaiche

Solución

de César Beade Franco

El punto A

Sean los puntos B(-1,0), C(1,0) y D(3,0).
En estas codiciones M=(4Cost-1,4Sint), ecuación paramétrica de la circunferencia de diámetro BD.
La mediatriz de CM y la recta BM se cortan en A($\frac{2-4\,\mathrm{Cos}[t]}{-2+\mathrm{Cos}[t]}$, $-\frac{3\,\mathrm{Sin}[t]}{-2+\mathrm{Cos}[t]}$), donde eliminando t obtenemos la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, cónica centrada en el origen con focos B y C y excentricidad $\frac{1}{2}$.



Podíamos omitir los anteriores cálculos considerando el círculo de diámetro BD como "cículo director" de una elipse de focos B y C. Así un punto M del círculo determina otro A de la elipse: la intersección de la línea BM que une M con un foco con la mediatriz de del segmento MC que une M con el otro foco. Esta mediatriz es precisamente la tangente a esta elipse por A.
Y la excentricidad será $\frac{BC}{BD}=\frac{1}{2}$.

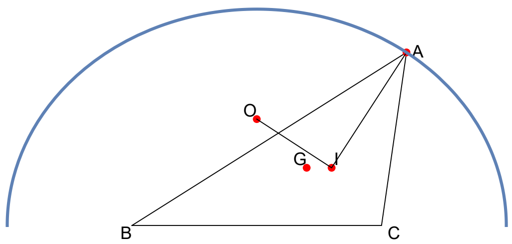
Q1

A cumple la condición para que GI sea paralela al lado BC, según se vió en el problema 909.

Q2

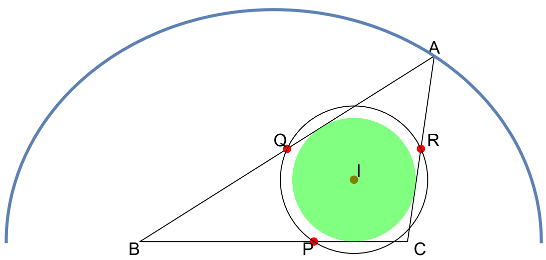
Los cálculos de este apartado y del próximo se simplifican drásticamente considerando ABC como un EH-triángulo (*) con e=2 (inversa de la excentricidad de la elipse), con lo que A=($2h$, $\sqrt{3}\sqrt{1-h^2}$). En estas condiciones O=(0, $\frac{2+h^2}{2\sqrt{3-3h^2}}$) e I=($h$, $\frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{3}}$).

El cálculo OI.IA=(h, $-\frac{\sqrt{3}h^2}{2\sqrt{1-h^2}}$).($h$, $\frac{2\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{3}}$)=0 nos demuestra la perpendicularidad de esos segmentos.



Q3

AI∩BC=P=($\frac{h}{2}$, 0), Q=($-\frac{1}{2}+h$, $\frac{1}{2}\sqrt{3-3h^2}$) y R=($\frac{1}{2}+h$, $\frac{1}{2}\sqrt{3-3h^2}$).
El centro de su circunferencia circunscrita es precisamente I (**).



Notas

(*) Ver, por ejemplo, los problemas 689 u 897 de esta página.
(**) Comprobando que la distancia de I a cada uno de estos 3 puntos es la misma: $\frac{\sqrt{4-h^2}}{2\sqrt{3}}$