

Problema 915.-

Sea un segmento BD cuyo punto medio es C . Considere un punto cualquiera M en el círculo del centro B y radio BD . La mediatriz del segmento CM corta la recta BM en el punto A . Sean G el baricentro, I el centro del círculo inscrito, O el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC . Sean P el punto de intersección de la recta AI con la recta BC , Q y R los puntos medios de los lados AB y AC .

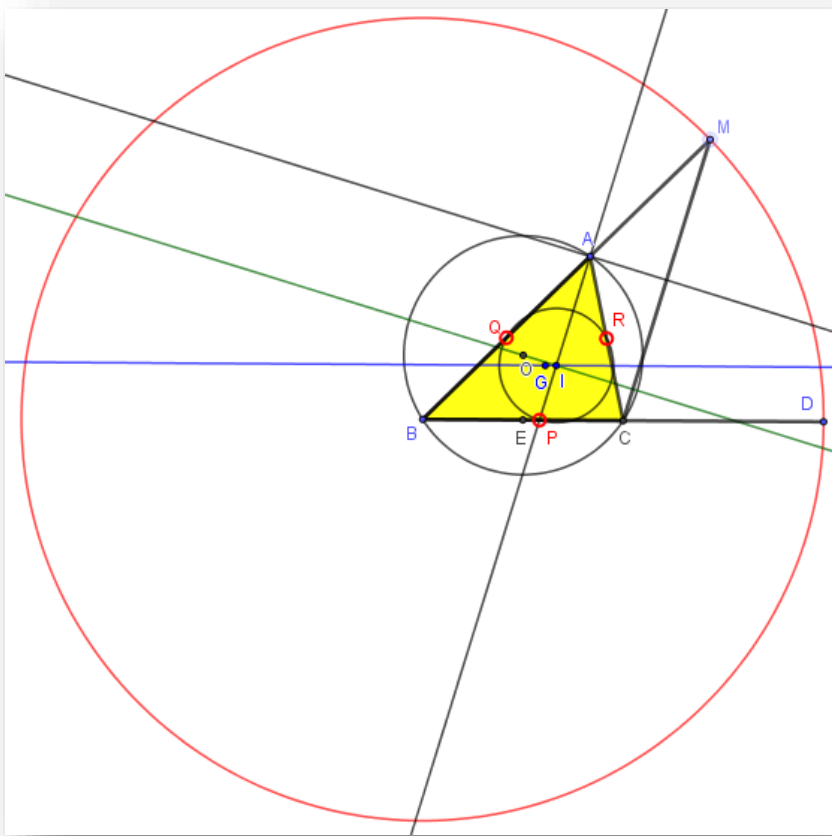
Q1 Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC .

Q2 Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI .

Q3 Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el círculo inscrito del triángulo ABC son concéntricos.

Fondanaiche P. (2019): *Comunicación personal*

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

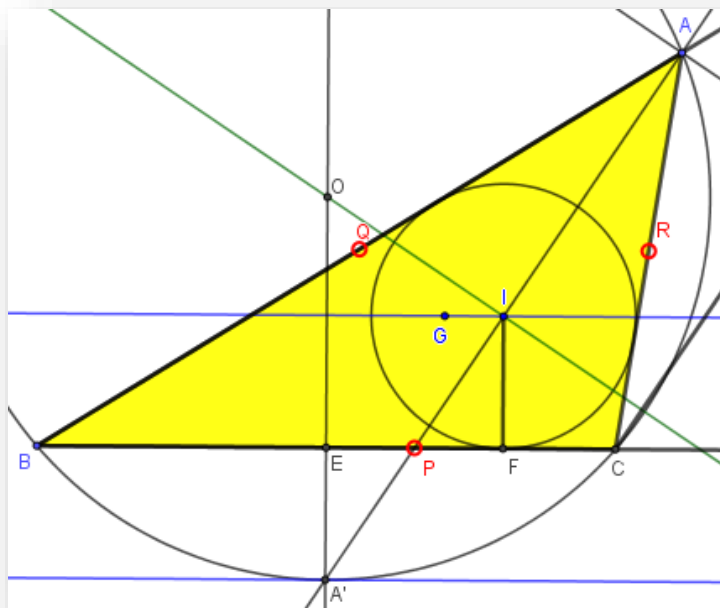


Q1 Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC .

Es consecuencia directa del Problema 909, teniendo en cuenta que en un triángulo ABC , la recta GI (baricentro, incentro), será paralela al lado BC si se verifica la relación $b + c = 2a$. En efecto, en nuestro triángulo $b = AC = AM$; $BM = BD = 2 \cdot BC = 2a$; $BM = BA + AM = c + b \rightarrow 2a = b + c$.

Q2 Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI.

Sean respectivamente, E el punto medio del lado BC, F el punto de intersección de la circunferencia inscrita con el lado BC y A' el punto donde la bisectriz AI corta a la circunferencia circunscrita y a la mediatriz del lado BC. Sean los triángulos rectángulos semejantes PFI y PEA' .



Observamos las longitudes de los segmentos PC, FC, PF y EP , respectivamente.

$$\frac{PC}{b} = \frac{BP}{c} = \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \rightarrow PC = \frac{b}{2}$$

$$FC = p - c = \frac{3a - 2c}{2}$$

$$PF = PC - FC = \frac{b}{2} - \frac{3a - 2c}{2};$$

$$PF = \frac{2c + b - 3a}{2};$$

$$PF = \frac{c - a}{2}$$

$$EP = EC - PC = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a - b}{2}$$

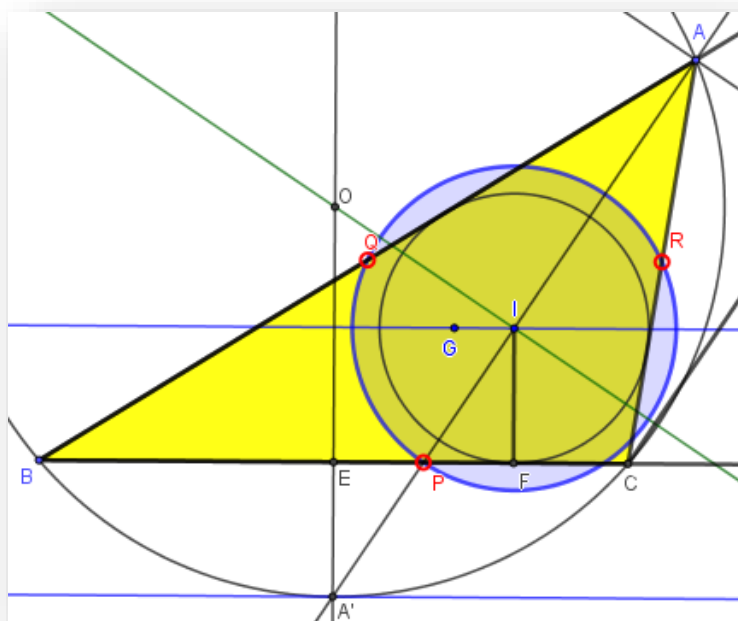
Como quiera que: $2a = b + c \rightarrow a - b = c - a \Rightarrow EP = PF$.

Por tanto, P es el punto medio de EF y $EA' = IF$, siendo $A'P = PI$.

Por tanto, I es el punto medio de la cuerda AA' ya que al ser GI paralela al lado BC, $2 \cdot \overline{IP} = \overline{IA'}$.

Si el punto I es el punto medio de la cuerda AA' , entonces $OI \perp AA' \rightarrow OI \perp AI$.

Q3 Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el círculo inscrito del triángulo ABC son concéntricos.



El centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo PQR es el Incentro.

Para ello, observamos que el triángulo BPQ es isósceles, ya que:

$$BQ = BP = \frac{c}{2}$$

De igual modo, el triángulo CPR también es isósceles, ya que:

$$CP = CR = \frac{b}{2}$$

Como ambos triángulos son isósceles, las mediatrices de los segmentos PQ y PR coinciden con las bisectrices de los ángulos B y C, respectivamente.

Por tanto, en efecto, el círculo circunscrito al triángulo PQR y el círculo inscrito del triángulo ABC son concéntricos.