Propuesto por Philippe Fondanaiche, webmaster de www.diophante.fr

Problema 915

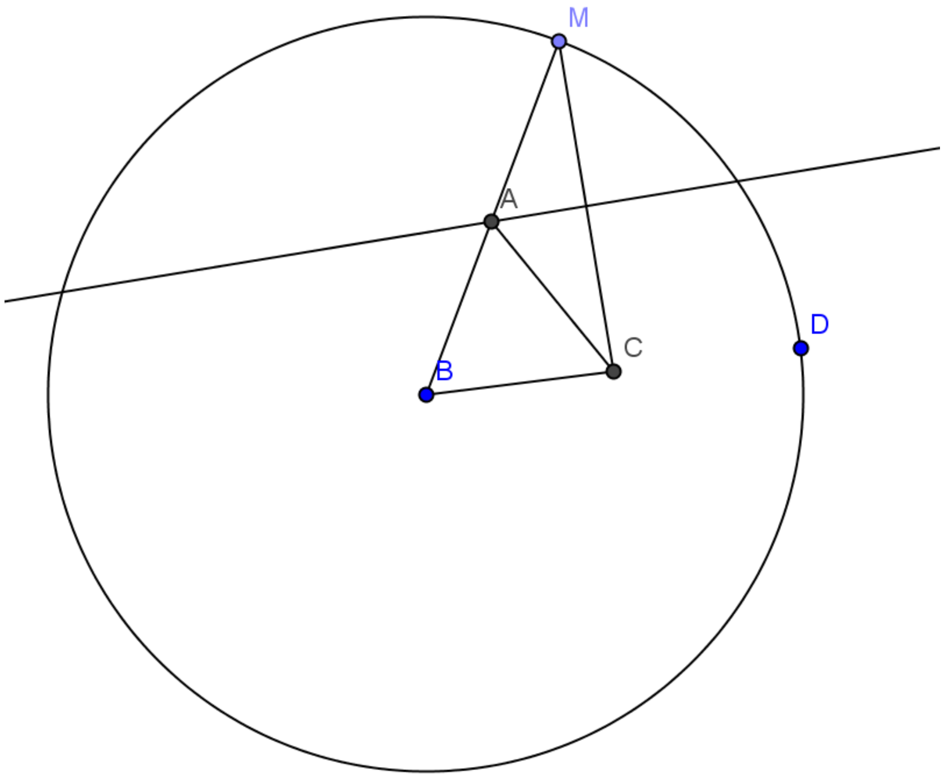
Sea un segmento BD cuyo punto medio es C. Considere un punto cualquiera M en el círculo del centro B y radio BD.

La mediatriz del segmento CM corta la recta BM en el punto A.
Sean G el baricentro, I el centro del círculo inscrito, O el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC.
Sean P el punto de intersección de la recta AI con la recta BC, Q y R los puntos medios de los lados AB y AC.

Q1 Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC.
Q2 Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI
Q3 Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el círculo inscrito del triángulo ABC son concéntricos

Fondanaiche P. (2019): Comunicación personal

Solución del director.



Q1 Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC.

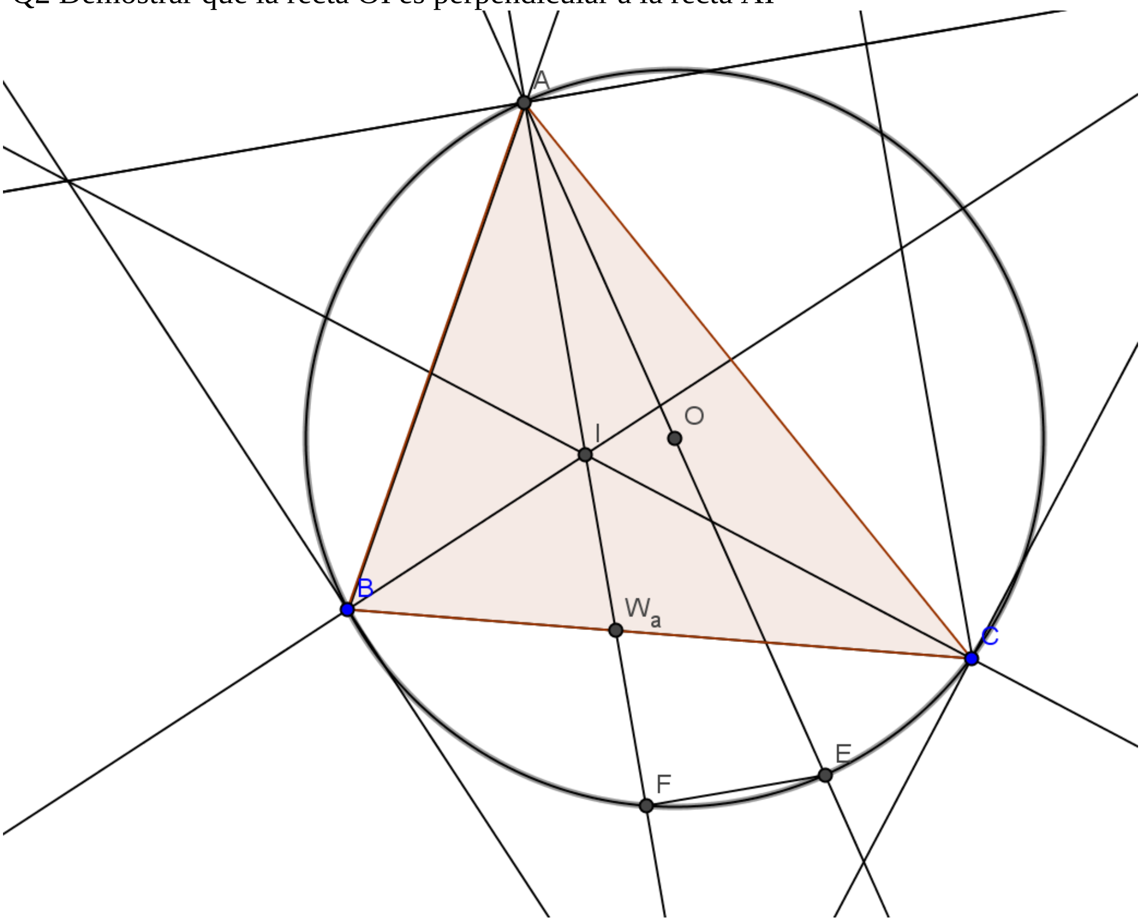
Sea BC=a. Sea AC=b. Será BA=2a-b.

Sea h la altura del lado a. la distancia de G al lado a es h/3.

Por otra parte, sea r el inradio de ABC.

Es h a = r(a+ b + 2 a - b)= 3 a r. Así, r=h/3, y tenemos lo pedido, GI es paralela a BC.

Q2 Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI



Siendo E el punto diametralmente opuesto a A y F la intersección de la bisectriz con la circunferencia circunscrita, dado que el triángulo AEF es rectángulo en F, lo pedido se justifica con el hecho geométrico de ser AI=1/2 AF.

BW_a = $BW_a = \frac{a(2a-b)}{(2a-b)+b} = \frac{2a-b}{2}, W_aC = \frac{ab}{(2a-b)+b} = \frac{b}{2}$

Es $AW_a{}^2$ a =$AW_a^2\, a = \left(a - \frac{b}{2}\right) b^2 + \frac{b}{2}(2a-b)^2 - a\left(a - \frac{b}{2}\right)\frac{b}{2}$

Así, $AW_a = \sqrt{\frac{3ab}{2} - \frac{3b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2ab - b^2}}{2}$

Entonces, por la potencia de W_a es:

$$AW_a\, W_aF = BW_a\, W_a\, C \rightarrow \sqrt{\frac{3ab}{2} - \frac{3b^2}{4}}\; W_aF = (\frac{2a-b}{2})(\frac{b}{2})$$

Así, $W_aF = \frac{\frac{2ab-b^2}{4}}{\sqrt{\frac{6ab-3b^2}{4}}} = \frac{\sqrt{2ab-b^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}AW_a$

Por otra parte, se tiene:

$$AI = \frac{b+(2a-b)}{a+b+(2a-b)}AW_a = \frac{2}{3}AW_a$$

$$IW_a = \frac{a}{a+b+(2a-b)}AW_a = \frac{1}{3}AW_a$$

Luego I es el punto medio de AF, que es lo que pretendíamos buscar.

Así, en efecto se cumple Q2.

Q3 Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el círculo inscrito del triángulo ABC son concéntricos

$P=W_a$

Luego BQP es isósceles en B, y así la mediatriz de PQ es la bisectriz de B.

CRP es isósceles en C, luego es análogo, luego el incentro de ABC es el circuncentro de PQR.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla. España.