Problema 915 de *triánguloscabri.* *Sea un segmento BD cuyo punto medio es C. Considere un punto cualquiera M en el círculo del centro B y radio BD.*

La mediatriz del segmento CM corta la recta BM en el punto A.

Sean G el baricentro, I el centro del círculo inscrito, O el centro del círculo circunscritodel triángulo ABC.

Sean P el punto de intersección de la recta AI con la recta BC, Q y R los puntos medios de los lados AB y AC.

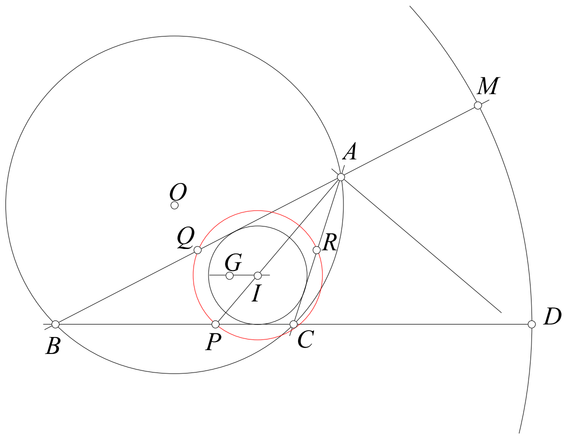
Q_1 : *Demostrar que la recta GI es paralela a la recta BC.*

Q_2 : *Demostrar que la recta OI es perpendicular a la recta AI.*

Q_3 : *Demostrar que el círculo circunscrito al triángulo PQR y el circulo inscrito del triangulo ABC son concéntricos.*

Propuesto por Philippe Fondanaiche.

Solución de Francisco Javier García Capitán. En primer lugar, construimos la figura:



Q_1 : Usando coordendas baricéntricas es fácil comprobar que el baricentro $G = (1 : 1 : 1)$, el incentro $I = (a : b : c)$ y el punto $J = (0 : 1 : -1)$, es decir el punto del infinito de la recta BC, están alineados si y solo si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0,$$

lo cual es cierto, que $AB + AC = AB + AM = AM = AD = 2 \cdot BC$.

Q_2: La recta OI será perpendicular a AI si contiene el punto del infinito de la bisectriz exterior del ángulo A, que es $(b-c : -b : c)$. Entonces hacemos:

$$\begin{vmatrix} a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ a & b & c \\ b-c & -b & c \end{vmatrix} = bc \begin{vmatrix} a^2S_A & bS_B & cS_C \\ a & 1 & 1 \\ b-c & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= bc\left(2a^2S_A - a\left(bS_B + cS_C\right) + (b-c)\left(bS_B - cS_C\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}(2a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c),$$

resultando la misma condición $2a - b - c = 0$ que en la cuestión anterior.

Q_3: Esta parte la resolvemos por la fuerza bruta usando *Mathematica*: El circuncentro de PQR es el punto $L = (2a^4b^2 - 3a^2b^4 + b^6 - 4a^4bc - 2a^2b^3c + 2b^5c + 2a^4c^2 + 2a^2b^2c^2 - b^4c^2 - 2a^2bc^3 - 4b^3c^3 - 3a^2c^4 - b^2c^4 + 2bc^5 + c^6 : b(-a^2b^3 + b^5 + 4a^4c - 5a^2bc^2 - 4b^3c^2 - 6a^2c^3 - 2b^2c^3 + 3bc^4 + 2c^5) : c(4a^4b - 6a^2b^3 + 2b^5 - 5a^2b^2c + 3b^4c - 2b^3c^2 - a^2c^3 - 4b^2c^3 + c^5))$.

Estas coordendas son proporcionales a las del incentro $I = (a : b : c)$ si y solo si cuando $2a - b - c = 0$ o $a = b = c$.